

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Vladimír Fuka

Modelování proudění ve vysokém rozlišení

Katedra meteorologie a ochrany prostředí
Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Josef Brechler, CSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Meteorologie a klimatologie

Praha 2006

Poděkování

Chtěl bych touto cestou poděkovat doc. RNDr. Josefu Brechlerovi, CSc., za jeho obětavé a trpělivé vedení této diplomové práce, a také Ing. Ludku Benešovi Ph.D. za jeho neocenitelné rady. Také chci poděkovat Ústavu technické matematiky FS ČVUT za poskytnutí výpočetních kapacit.

V neposlední řadě bych chtěl poděkovat svým rodičům za všestrannou podporu, kterou mi poskytovali během celého studia

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 11. 8. 2005

Vladimír Fuka

Název práce: Modelování proudění ve vysokém rozlišení

Autor: Vladimír Fuka

Katedra (ústav): Katedra meteorologie a ochrany prostředí

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Josef Brechler, CSc.

e-mail vedoucího: josef.brechler@mff.cuni.cz

Abstrakt: V této práci je představen počítačový model pro výpočet nestlačitelného laminárního proudění, který má být základem pro model proudění v městské zástavbě. V první části jsou odvozeny Navierovy-Stokesovy rovnice a uvedeny některé metody pro jejich řešení. Pro základní časovou diskretizaci je použita metoda postupných kroků. Prostorová diskretizace je provedena pomocí metody konečných objemů. Advekční členy se počítají pomocí centrálního schématu s vysokým rozlišením. Pro popis geometrie problému je použita metoda vnořené hranice, a k výpočtu je proto použita nerovnoměrná kartézská síť. Ve druhé kapitole jsou některé podrobnosti implementace jednotlivých metod. V další části je pak provedena validace modelu pomocí několika testovacích případů. Nejprve se počítal vývoj mezní vrstvy nad hladkou deskou a výsledek byl porovnán s Blasiovým analytickým řešením. Poté bylo řešeno proudění ve čtvercové dutině pro Reynoldsova čísla 100, 1000 a 10000. Výsledky jsou srovnány s dostupnými referenčními numerickými řešeními. Poslední řešený případ bylo proudění kolem válce s čtvercovým průřezem při Reynoldsových číslech 10–250. Jako hlavní srovnávací kritéria byly použity délka recirkulační zóny, Strouhalovo číslo a koeficient odporu.

Klíčová slova: počítačová dynamika tekutin, metoda konečných objemů, centrální schémata, metoda vnořené hranice, dutina se čtvercovým průřezem, válec se čtvercovým průřezem

Title: A high resolution model of air-flow

Author: Vladimír Fuka

Department: Department of Meteorology and Environmental Protection

Supervisor: doc. RNDr. Josef Brechler, CSc.

Supervisor's e-mail address: josef.brechler@mff.cuni.cz

Abstract: A computer model for solving incompressible laminar flow is introduced in this thesis. It should be a basis for an urban air-flow model. In the first part Navier-Stokes equations are derived and several methods for their solution are introduced. For basic time discretisation the fractional step method is used and the finite volume method is used for a space discretisation. Advection terms are computed using central high-resolution scheme. The problem geometry is described by the immersed boundary method and a nonuniform Cartesian grid is therefore used for the computation. Some details about implementation of particular methods are mentioned in the second chapter. In the third chapter the model is validated using several test examples. Firstly a laminar flow over a flat plate is computed and compared to the Blasius analytical solution. Then a square cavity flow is solved with Reynolds numbers of 100, 1000 and 5000 and obtained result are compared to available reference data. Finally a flow over a square cylinder with Reynolds numbers from 10 to 250 is solved. As the main comparative criteria a recirculation length, Strouhal number and a drag coefficient are used.

Keywords: computational fluid dynamics, finite volume method, central schemes, immersed boundary method, square cavity, square cylinder

Úvod

V posledních desetiletích nastává výrazná potřeba správně popsat proudění vzduchu v městské zástavbě. Důvodem je rostoucí intenzita automobilové dopravy a nárůst vlivu dalších zdrojů znečištění. Jde přitom o velmi složitý úkol, protože složitá městská zástavba výrazně ovlivňuje tvar proudění.

K modelování proudění se využívají dva přístupy: fyzikální modelování a matematické modelování. Fyzikální modelování spočívá v měření proudění na zmenšených modelech skutečného terénu, při dodržení jistých kritérií podobnosti. Často je třeba používat finančně náročné experimentální zařízení. Druhou možností je modelování matematické. Při něm se používá řešení pohybových a dalších rovnic numericky pomocí počítačů. V tomto případě představuje hlavní potíže složitost použitých parciálních diferenciálních rovnic. Navíc je v mezní vrstvě atmosféry proudění turbulentní. To nelze řešit v takto složitých případech přímo pomocí Navierových-Stokesových rovnic, ale je třeba zavést modely turbulence, často poměrně komplikované.

Tato práce si klade za cíl být základem pro počítačový model proudění. Protože tvorba kompletního modelu svou náročností přesahuje možnosti diplomové práce, uvažuje se zatím pouze proudění laminární. Navíc se prozatím modelovalo pouze proudění s neutrálním teplotním zvrstvením, tj. bez vztlakových efektů. Pro jednoduchost a menší výpočetní náročnost se práce zatím omezila na dva rozměry. Přejít ke třem dimenzím je u všech použitých metod přímočarý.

Zároveň bylo cílem použít některé přístupy, které zatím v meteorologii nenašly příliš uplatnění. Jde zejména o metodu konečných objemů, godunovská schémata a metodu vnořené hranice. Ve většině meteorologicky zaměřených modelů proudění se pro prostorovou diskretizaci používá spektrální metoda nebo metoda konečných diferencí. Spektrální metoda ovšem není příliš vhodná pro pole s velkými gradienty, protože se u nich nepříznivě projevuje Gibbsův jev. Navíc se na omezené oblasti obtížně implementují okrajové podmínky. Oproti metodě konečných diferencí pak má metoda konečných objemů výhodu v snadném zajištění konzervativnosti schématu a

snadné aplikaci různých druhů početních sítí. Proto je také na metodě konečných objemů založena většina komerčních programů.

Pro výpočet advekčních členů se při řešení problémů nestlačitelného proudění obvykle používají klasická diferenční schémata, převedená do metody konečných objemů. V této práci byla použita centrální godunovovská metoda, původně vyvinutá zejména pro řešení problémů stlačitelného proudění a podobných hyperbolických zákonů zachování.

Pro popis geometrie rozložení překážek byla zvolena poměrně nová metoda vnořené hranice (MITTAL, IACCARINO, 2005). Ta umožňuje řešit i úlohy ve složité geometrii v kartézské síti. To nejenže zjednodušuje tvorbu programu, ale také umožňuje plně využít řád přesnosti použitých metod, který v případě nestrukturovaných sítí, tvarovaných podle překážek, může klesat až na první řád přesnosti.

V první kapitole práce budou představeny Navierovy-Stokesovy rovnice a některé metody jejich řešení. Zvláštní pozornost bude věnována již jmenovaným metodám, tedy metodě konečných objemů, godunovovským metodám a metodě vnořené hranice.

Druhá kapitola bude věnována popisu programové realizace modelu. Také v ní budou popsány detaily implementace některých metod.

Ve třetí kapitole pak budou představeny výsledky, získané použitím modelu na několika testovacích příkladech. Ty byly vybrány tak, aby bylo možno ověřit funkčnost všech použitých metod pro stacionární i nestacionární proudění.

Obsah

Úvod	iii
1 Matematické modelování proudění	1
1.1 Navierovy-Stokesovy rovnice	1
1.1.1 Rovnice kontinuity	1
1.1.2 Pohybové rovnice	2
1.1.3 Bezrozměrný tvar Navierových-Stokesových rovnic	3
1.2 Řešení Navierových-Stokesových rovnic	4
1.2.1 Výpočet tlaku	4
1.2.2 Metoda postupných kroků	5
1.3 Metoda konečných objemů	7
1.3.1 Posunutá síť	7
1.3.2 Aproximace objemových a plošných integrálů	8
1.3.3 Interpolace hodnot na stěnách	9
1.4 Advektivní členy	10
1.4.1 TVD metody	10
1.4.2 Konzervativní zápis	12
1.4.3 Semi-diskrétní schéma s vysokým rozlišením	12
1.4.4 Po částech lineární rekonstrukce	15
1.4.5 TVD metoda Runge-Kutta	16
1.5 Metoda vnořené hranice	17
1.5.1 Spojitá zdrojová funkce	18
1.5.2 Diskrétní zdrojová funkce	18
1.5.3 Zdroje hybnosti a hmoty	20
1.5.4 Interpolace rychlosti	20
2 Struktura programu	23
2.1 Základní popis	23
2.2 Průběh výpočtu	23
2.2.1 Základní schéma	23

2.2.2	Implementace metod	24
2.2.3	Tlaková korekce	27
2.3	Okrajové a počáteční podmínky	28
2.3.1	Okrajové podmínky	28
2.3.2	Počáteční podmínky	28
2.4	Výstupní data	28
3	Výsledky	30
3.1	Proudění nad hladkou deskou	30
3.1.1	Popis problému	30
3.1.2	Parametry výpočtu	33
3.1.3	Výsledky simulace	34
3.2	Proudění v dutině se čtvercovým průřezem	36
3.2.1	Popis problému	36
3.2.2	Výsledky simulace	37
3.3	Proudění kolem nekonečného válce čtvercového průřezu	43
3.3.1	Popis problému	43
3.3.2	Parametry výpočtu	44
3.3.3	Výsledky simulace	45
4	Závěr	50
A	Obrázky proudění	52
	Literatura	58

Kapitola 1

Matematické modelování proudění

1.1 Navierovy-Stokesovy rovnice

1.1.1 Rovnice kontinuity

Proudění tekutin můžeme popsat pomocí zákonů zachování (podrobněji např. FERZIGER, PERIĆ, 1997; VERSTEEG, MALALASEKERA, 1995). Jedním ze základních je zákon zachování hmoty, který můžeme vyjádřit pomocí rovnice kontinuity. Při jejím odvození vyjdeme z integrálního tvaru zákona zachování hmoty pro malou oblast (tzv. kontrolní objem) Ω

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \, d\Omega + \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0, \quad (1.1)$$

kde S je povrch hranice oblasti Ω , $\hat{\mathbf{n}}$ jednotkový vektor vnější normály, ρ hustota tekutiny a \mathbf{u} vektor rychlosti proudění. Pokud aplikujeme na (1.1) Gaussovu větu a provedeme limitu pro velikost kontrolního objemu jdoucí k nule, získáme diferenciální tvar rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (1.2)$$

V případě, že můžeme hustotu považovat za konstantní, se rovnice (1.2) zjednoduší na tvar

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (1.3)$$

Toto je také tvar rovnice kontinuity pro nestlačitelné proudění, tj. proudění o $M \ll 1$, kde M je tzv. Machovo číslo, definované jako

$$M = \frac{|\mathbf{u}|}{c}, \quad (1.4)$$

kde c je rychlost zvuku v daném prostředí.

1.1.2 Pohybové rovnice

Další zákon zachování, který popisuje chování tekutin, je zákon zachování hybnosti. Zapišeme jej opět v integrální formě pro kontrolní objem jako

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \, d\Omega + \oint_S \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \sum \mathbf{f}, \quad (1.5)$$

kde \mathbf{f} jsou síly působící na kontrolní objem, které mohou být objemové (tíhová síla, Coriolisova síla, elektromagnetické síly...), nebo mohou působit na povrch objemu (tlak, normálová a tečná napětí, povrchové napětí...).

Normálová a tečná napětí vznikají v důsledku odporu, jež klade tekutina deformaci z důvodu vnitřního tření, způsobeného molekulární difuzí. Pro newtonovské tekutiny je možné tyto síly vyjádřit pomocí tenzoru napětí (FERZIGER, PERIĆ, 1997)

$$\mathbf{T} = -(p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}, \quad (1.6)$$

kde p je tlak, μ koeficient dynamické viskozity, λ koeficient druhé viskozity, \mathbf{I} jednotkový tenzor a \mathbf{D} tenzor rychlosti deformace, definovaný jako

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\operatorname{grad} \mathbf{u} + (\operatorname{grad} \mathbf{u})^T]. \quad (1.7)$$

Pro druhou viskozitu můžeme použít vztah $\lambda = \frac{2}{3}\mu$, který platí pro ideální plyny. Navíc budeme předpokládat že μ je konstantní. Zákon zachování hybnosti (1.5) v integrálním tvaru potom můžeme psát

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \, d\Omega + \oint_S \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS &= - \oint_S p \hat{\mathbf{n}} \, dS + \\ &+ \oint_S \frac{1}{3} \mu \operatorname{div}(\mathbf{u}) \hat{\mathbf{n}} \, dS + \oint_S \operatorname{grad}(\mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS + \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \, d\Omega. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Opět můžeme použít operátor divergence a Gaussovou větu a získáme diferenciální tvar

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\operatorname{grad} p + \operatorname{grad} \left(\frac{\mu}{3} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} \mathbf{u}) + \rho \mathbf{b}. \quad (1.9)$$

V případě konstantní hustoty můžeme za pomoci rovnice kontinuity (1.3) psát pohybové rovnice jako

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \operatorname{div}(\nu \operatorname{grad} \mathbf{u}) + \mathbf{b}, \quad (1.10)$$

kde $\nu = \mu/\rho$ je koeficient kinematické viskozity.

Pokud jsou objemové síly konstantní, např. v případě tíhových sil

$$\mathbf{b} = -g\mathbf{k}, \quad (1.11)$$

kde g je tíhové zrychlení, je možno jejich vliv zahrnout do tlakového členu, definováním nového tlaku p' jako

$$p' = p + \rho g z. \quad (1.12)$$

Pohybová rovnice má poté tvar

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p' + \operatorname{div}(\nu \operatorname{grad} \mathbf{u}). \quad (1.13)$$

Pohybové rovnice a rovnici kontinuity (ve složitějších případech doplněné ještě o zákon zachování energie) souhrnně nazýváme Navierovy-Stokesovy rovnice.

1.1.3 Bezrozměrný tvar Navierových-Stokesových rovnic

Pohybové rovnice (1.10) a rovnice kontinuity (1.3) lze převést do bezrozměrného tvaru zavedením bezrozměrných proměnných, definovaných jako poměr dané veličiny a vhodného měřítka stejného fyzikálního rozměru (FERZIGER, PERIĆ, 1997). Například můžeme zavést bezrozměrnou souřadnici jako

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad (1.14)$$

kde L je vhodně zvolená referenční délka. Podobně můžeme definovat další bezrozměrné proměnné:

$$\mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U}; \quad t^* = \frac{t}{L/U}; \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2}; \quad \mathbf{b}^* = \frac{\mathbf{b}}{g}. \quad (1.15)$$

Po dosazení těchto proměnných mají rovnice (1.3) a (1.10) tvar

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^* = 0, \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \operatorname{div}(\mathbf{u}^*\mathbf{u}^*) = -\operatorname{grad} p^* + \frac{1}{\operatorname{Re}} \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u}^* + \frac{\mathbf{b}^*}{\operatorname{Fr}^2}, \quad (1.17)$$

kde

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu} \quad (1.18)$$

je tzv. Reynoldsovo číslo, které udává poměr setrvačných a vazkých sil, a

$$\text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{Lg}} \quad (1.19)$$

je Froudeovo číslo, udávající poměr setrvačných a tíhových sil.

Pokud je jedinou objemovou silou síla tíhová, můžeme tedy používat bezrozměrný tvar rovnice (1.13)

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \text{div}(\mathbf{u}^* \mathbf{u}^*) = -\text{grad} p^* + \frac{1}{\text{Re}} \text{div grad} \mathbf{u}^*. \quad (1.20)$$

V dalším textu již zpravidla nejsou bezrozměrné veličiny značeny hvězdičkou.

1.2 Řešení Navierových-Stokesových rovnic

1.2.1 Výpočet tlaku

Rovnice kontinuity pro nestlačitelné proudění (1.3) neobsahuje derivaci stavové proměnné podle času. Výpočet tlaku je proto třeba provádět jiným způsobem než v případě stlačitelného proudění. Tam je totiž možno použít rovnici kontinuity pro výpočet hustoty a tlak dopočítat ze stavové rovnice. Nestlačitelné proudění nám ovšem takovou možnost neposkytuje a rovnice kontinuity je v tomto případě vlastně jen kinematickou podmínkou zajišťující nedivergentnost pole proudění.

Možnost, jak vyřešit tento problém, je zkonstruovat pole tlaku tak, aby zajistilo splnění rovnice kontinuity. Rovnici pro tlak tedy získáme kombinací pohybové rovnice (1.9) a rovnice kontinuity (1.3). Nejprve aplikujeme operátor divergence na pohybovou rovnici a výsledek upravíme pomocí rovnice kontinuity a pravidel vektorového počtu. Výsledkem je tvar (FERZIGER, PERIĆ, 1997)

$$\text{div grad} p = -\text{div} \left[\text{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \mu \text{grad} \mathbf{u} \right] - \rho \mathbf{b} + \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t}. \quad (1.21)$$

V případě konstantní hustoty a viskozity se výraz na pravé straně zjednoduší a získáme rovnici

$$\text{div grad} p = -\text{div div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}), \quad (1.22)$$

kteřá v různých obměnách slouží ke spojení pohybových rovnic a rovnice kontinuity pro nestlačitelné proudění.

1.2.2 Metoda postupných kroků

Jednou z konkrétních metod, kterou je možno použít k řešení rovnic (1.3) a (1.10), je metoda postupných kroků (fractional step method). Její myšlenka spočívá v rozložení rovnice, obsahující více členů, do několika následujících kroků. Například pro rovnici (1.20) diskretizovanou explicitní Eulerovou metodou, symbolicky zapsanou ve tvaru

$$u_i^{n+1} = u_i^n + (C_i + D_i + P_i)\Delta t, \quad (1.23)$$

by mohla být použita metoda postupných kroků jako:

$$u_i^* = u_i^n + C_i\Delta t, \quad (1.24)$$

$$u_i^{**} = u_i^* + D_i\Delta t, \quad (1.25)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^{**} + P_i\Delta t. \quad (1.26)$$

Zde P_i je gradient veličiny, která splňuje upravenou rovnici (1.22).

Tuto metodu poprvé použil Chorin (1968) a pro metodu konečných objemů na posunuté síti (viz 1.3.1) ji upravili Kim a Moin (1985). V jejich variantě se nejdříve pomocí pohybové rovnice (1.20) s vynechaným členem tlakového gradientu spočítá pole vektoru rychlosti \mathbf{u}^* , které nesplňuje rovnici kontinuity. Poté se pomocí upravené rovnice (1.22) spočítá takzvaný pseudotlak ϕ a pomocí něj se provede projekce rychlosti \mathbf{u}^* na \mathbf{u}^{n+1} , která už splňuje rovnici kontinuity. Podle posledního kroku se těmito metodám také říká projekční metody nebo metody tlakové korekce. Metodu Kima a Moína můžeme zapsat jako

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -[\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})]^{n+1/2} + \frac{1}{2\text{Re}}\nabla^2(\mathbf{u}^* + \mathbf{u}^n), \quad (1.27)$$

$$\mathbf{u}^*|_{\partial\Omega} = (\mathbf{u}_b + \Delta t \nabla\phi^n)|_{\partial\Omega}, \quad (1.28)$$

a projekční krok

$$\Delta t \nabla^2\phi^{n+1} = \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad \text{v } \Omega, \quad (1.29)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\phi^{n+1} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \quad (1.30)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla\phi^{n+1}. \quad (1.31)$$

Výraz $-\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})^{n+1/2}$ je advekční člen, vyjádřený v čase $t^{n+1/2}$ pomocí vhodné metody alespoň druhého řádu přesnosti. \mathbf{u}_b je rychlost pevné hranice oblasti $\partial\Omega$. V rovnici (1.27) je pro výpočet difuzních členů použita semi-implicitní metoda Cranka a Nicolsonové (FERZIGER, PERIĆ, 1997), která

zvyšuje stabilitu. Přestože není pro výpočet pole rychlosti potřeba tlak, je jeho hodnotu možno zjistit z rovnice

$$\nabla p^{n+1/2} = \nabla \phi^{n+1} - \frac{\Delta t}{2\text{Re}} \nabla \phi^{n+1}. \quad (1.32)$$

Tlak spočtený tímto způsobem uprostřed časového intervalu je druhého řádu přesnosti v čase.

Metoda Kima a Moína nepotřebuje pro výpočet \mathbf{u}^* tlakový gradient, ovšem okrajové podmínky pro \mathbf{u}^* jsou o něco složitější než pro \mathbf{u}^{n+1} , kvůli zachování druhého řádu přesnosti. Později vznikly další projekční metody, které v prvním kroku tlakový gradient používají a pro jeho výpočet využívají tlak z minulého časového kroku. Příkladem takové metody je například metoda BCG (BELL et al., 1989), nebo metody označované podle (BROWN, MINION, 2000) jako PmI a PmII. Tyto dvě metody jsou velmi podobné metodě Kima a Moína a lze je psát ve tvaru

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \nabla p^{n-1/2} = -[\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})]^{n+1/2} + \frac{1}{2\text{Re}} \nabla^2 (\mathbf{u}^* + \mathbf{u}^n), \quad (1.33)$$

$$\mathbf{u}^*|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_b, \quad (1.34)$$

$$\Delta t \nabla^2 \phi^{n+1} = \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad \text{v } \Omega, \quad (1.35)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi^{n+1} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \quad (1.36)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \phi^{n+1}. \quad (1.37)$$

V těchto metodách je \mathbf{u}^* aproximací \mathbf{u}^{n+1} druhého řádu přesnosti, a proto je možno použít pro \mathbf{u}^* stejné okrajové podmínky jako pro \mathbf{u}^{n+1} .

Obě metody se liší pouze výpočtem tlaku. Metoda PmI používá jednoduchý výraz

$$\nabla p^{n+1/2} = \nabla p^{n-1/2} + \nabla \phi^{n+1}, \quad (1.38)$$

zatímco metoda PmII používá

$$\nabla p^{n+1/2} = \nabla p^{n-1/2} + \nabla \phi^{n+1} - \frac{\Delta t}{2\text{Re}} \nabla \phi^{n+1}. \quad (1.39)$$

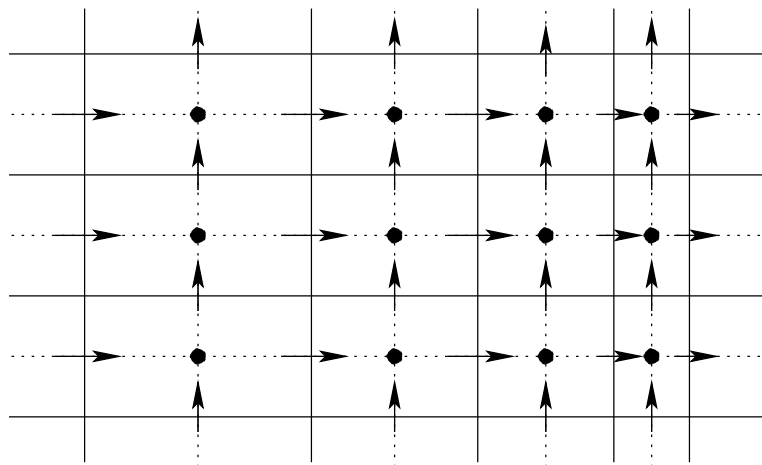
V případě PmI zůstává na hranicích konstantní gradient tlaku, což opravuje metoda PmII jejíž tlakové pole je přesnější. Konkrétně je PmI druhého řádu přesnosti pro rychlost, ale pouze prvního řádu pro tlak. Metoda PmII je pak druhého řádu přesnosti pro rychlost i tlak. Podrobnější rozbor chyb podává (BROWN, MINION, 2000). V dalších výpočtech je používána právě metoda PmII. V těchto metodách je \mathbf{u}^* aproximací \mathbf{u}^{n+1} druhého řádu přesnosti, a proto je možno použít pro \mathbf{u}^* stejné okrajové podmínky jako pro \mathbf{u}^{n+1} .

1.3 Metoda konečných objemů

Metoda konečných objemů (finite volume method) je jednou z metod, jak převést parciální diferenciální rovnice na soustavu algebraických rovnic pro konečný počet neznámých. Hlavní myšlenka metody spočívá v rozdělení početní oblasti na konečný počet tzv. kontrolních objemů, pro něž použijeme integrální tvar rovnic, např. (1.8), ve kterých aproximujeme vhodným způsobem jednotlivé členy. Pole proměnných nahrazujeme průměrnými hodnotami pro dané kontrolní objemy, na rozdíl od metody konečných diferencí, ve které se používají hodnoty proměnných v bodech sítě.

1.3.1 Posunutá síť

Pokud řešíme soustavu více proměnných, jako v případě Navierových-Stokesových rovnic (1.2) a (1.8), není nutné pro všechny proměnné používat stejné kontrolní objemy. Často se používá tak zvaná posunutá síť (staggered grid), ve které se skalární veličiny (např. tlak) ukládají do normální sítě, ale složky rychlosti se ukládají do sítě jejíž středy kontrolních objemů leží na hranách kontrolních objemů běžné sítě. Nejčastěji se používá plně posunutá síť, kterou zavedli Harlow a Welch (1965). U této sítě mají odlišné kontrolní objemy i jednotlivé složky vektoru rychlosti, jak je vidět na obr. 1.1. Tato síť je dále používána v této práci.

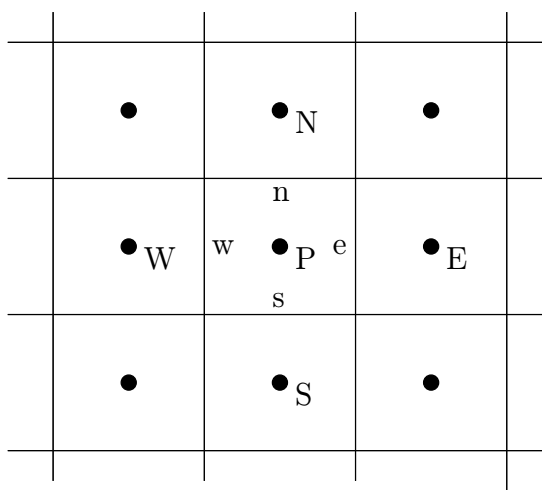


Obrázek 1.1: Posunutá síť

Hlavní důvod pro zavedení posunuté sítě bylo zamezení nežádoucích oscilací, které vznikají, pokud se na síti se společným umístěním proměnných (colocated grid) použije pro výpočet gradientu tlaku lineární interpolace.

Další výhodou je, že některé členy, které by jinak bylo třeba počítat interpolací, můžeme na posunuté síti spočítat bez interpolace s přesností druhého řádu.

Posunutou pravoúhloú síť lze vytvořit dvěma způsoby. První možnost je vytvořit nejprve kontrolní objemy pro skalární veličiny a uprostřed nich definovat body ve kterých se ukládají hodnoty skalárních veličin a kterými vedou hranice kontrolních objemů pro složky rychlosti (viz obr. 1.1). Druhá možnost je opačný postup, tj. nejdřív vytvořit body a středem mezi nimi vést hranice kontrolních objemů. V prvním případě reprezentuje hodnota uložená uprostřed objemu s větší přesností průměr přes celý objem, ve druhém případě je přesnější vyjádření některých derivací pomocí centrálních diferencí (FERZIGER, PERIĆ, 1997). V této práci je používán první způsob. V následujícím textu bude používáno značení podle obrázku 1.2, hodnoty v kontrolních objemech budou označovány velkými písmeny a hodnoty na jejich stěnách malými písmeny. Pro ten kontrolní objem, který právě počítáme budeme používat písmeno P a pro přilehlé kontrolní objemy písmena N, E, S a W.



Obrázek 1.2: Značení sousedních kontrolních objemů a společných hran

1.3.2 Aproximace objemových a plošných integrálů

Objemové integrály v rovnici (1.8) můžeme s druhým řádem přesnosti určit jako součin průměru veličiny přes kontrolní objem a velikosti objemu

$$\int_{\Omega} q \, d\Omega = q_p \Delta\Omega. \quad (1.40)$$

Dalším typem členů, které je třeba aproximovat v rovnici (1.8) jsou plošné integrály, např. konvektivních a difuzivních toků. Tyto integrály je třeba rozložit na součet integrálů přes jednotlivé stěny

$$\oint_S f \, dS = \sum_k \int_{S_k} f \, dS. \quad (1.41)$$

Jednotlivé integrály pak můžeme do druhého řádu přesnosti aproximovat jako součin hodnoty dané funkce a velikosti dané plochy

$$\int_{S_k} f \, dS = f_k \Delta S_k, \quad (1.42)$$

pokud známe hodnotu funkce f_k na ploše k . Pokud jsou k výpočtu f použity pouze hodnoty, které jsou v posunuté síti uloženy právě v kontrolním objemu se středem na stěně k , můžeme je přímo použít. V ostatních případech je třeba získat hodnotu f_k interpolací. Je důležité, aby se výpočet toku danou plochou prováděl stejným způsobem pro obě sousedící buňky. V tom případě je totiž metoda konečných objemů konzervativní a garantuje zachování dané veličiny.

1.3.3 Interpolace hodnot na stěnách

Možností jak interpolovat hodnoty proměnných na stěnách je několik. Nejjednodušší je tzv. upwind interpolace (nebo upwind differencing scheme – UDS). Spočívá v tom, že hodnotu na stěně aproximujeme hodnotou z toho přilehlého kontrolního objemu, který leží proti směru proudění. Proměnnou ϕ na stěně e tedy interpolujeme jako

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_E & \text{pokud } (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}})_e < 0, \\ \phi_P & \text{pokud } (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}})_e > 0. \end{cases} \quad (1.43)$$

Takováto interpolace je pouze prvního řádu přesnosti a tedy prvního řádu bude celé schéma. Toto schéma zároveň trpí velkou numerickou difuzí, tj. způsobuje dodatečný tok podobný difuznímu členu v pohybových rovnicích. Proto tato metoda není schopná s dostatečnou přesností popsat pole s velkými gradienty bez použití neúměrně husté sítě.

Další možností je lineární interpolace hodnot ϕ_E a ϕ_P , neboli tzv. metoda centrálních diferencí (central differencing scheme – CDS). Hodnotu ϕ_e získáme pomocí vztahu

$$\phi_e = \phi_E \lambda_e + \phi_P (1 - \lambda_e), \quad (1.44)$$

kde

$$\lambda = \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P}. \quad (1.45)$$

Tato metoda je druhého řádu přesnosti a je velmi často používána. V oblasti velkých gradientů ovšem může způsobovat nežádoucí oscilace. V této práci je použita pro výpočet difuzních členů a gradientů pro výpočet tlakového gradientu a operátoru divergence.

1.4 Advekční členy

1.4.1 TVD metody

Největší problém při řešení pohybových rovnic (1.8) představují nelineární advekční členy. Pro jejich výpočet je možno použít klasické interpolační postupy metody konečných objemů. V případě upwind metody je ovšem výsledné schéma pouze prvního řádu přesnosti a metoda centrálních diferencí může způsobovat při vyšších Reynoldsových číslech nežádoucí oscilace, což platí i pro obdobné metody vyšších řádů. Konkrétně je pro metodu centrálních diferencí nutné, aby byla splněna podmínka (VERSTEEG, MALALASEKERA, 1995; WESSELING, 2001)

$$\text{Re}_{\text{loc}} < 2, \quad (1.46)$$

kde lokální Reynoldsovo číslo Re_{loc} je definováno jako

$$\text{Re}_{\text{loc}} = \frac{u \Delta x}{\nu} = u^* \Delta x^* \text{Re} \quad (1.47)$$

a představuje poměr mezi numerickými advekčními a difuzními toky v daném kontrolním objemu. Tato podmínka zajišťuje, že metoda tzv. zachovává monotonicitu pro rovnici s advekcí a difuzí, zároveň však tato podmínka představuje silné omezení pro velikost kroku sítě při velkých Reynoldsových číslech.

Princip zachování monotonicity lze ukázat na zjednodušeném modelu pohybových rovnic – lineární rovnici advekce

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (1.48)$$

kde $c > 0$ je konstanta a φ je skalární funkce. Tato rovnice zachovává monotonicitu, neboť pokud $\varphi(x, 0)$ je monotónní, pak je monotónní i $\varphi(x, t)$, $t > 0$.

Definice 1. O numerickém schématu říkáme, že zachovává monotonicitu, pokud pro každou nerostoucí (neklesající) počáteční podmínku $\{\varphi_j^0\}$ jsou numerická řešení v dalších časových hladinách $\{\varphi_j^n\}$, $n = 1, 2, \dots$ nerostoucí (neklesající)

Metoda centrálních diferencí ve spojení s jednoduchými časovými schémata je lineární metoda druhého řádu, a proto nemůže zachovávat monotonicitu podle následující věty.

Věta 1. *Godunovova věta o řádové bariéře. Lineární jednokrokové numerické schéma druhého řádu přesnosti pro rovnici advekce (1.48) může zachovávat monotonicitu, pouze pokud $|c|\Delta t/\Delta x \in \mathbb{N}$, kde \mathbb{N} je množina všech přirozených čísel.*

Důkaz této věty, jakož i další věty, která bude zformulována v této kapitole, může čtenář najít v knize (WESSELING, 2001). Obdobná věta platí také pro více krokové metody. Proto, pokud chceme používat metody alespoň druhého řádu přesnosti, které zachovávají monotonicitu, musíme přejít k nelineárním schématům. Další vlastnost, která je obdobná zachování monotonicity, je TVD (total variation diminishing), neboli nezvyšování celkové variace, kde celková variace je definována jako

$$\text{TV}(\varphi(t, \cdot)) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t, x) - \varphi(t, x - \epsilon)| dx. \quad (1.49)$$

O φ říkáme že má vlastnost TVD, pokud celková variace φ neroste s časem. Pro φ splňující rovnici advekce (1.48) tato vlastnost platí, proto žádáme aby tuto vlastnost mělo i numerické schéma, pro které celkovou derivaci definujeme

$$\text{TV}(\varphi^n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\varphi_j^n - \varphi_{j-1}^n|, \quad (1.50)$$

pokud součet řady na pravé straně existuje. O schématu říkáme že je TVD pokud $\text{TV}(\varphi^n)$ neroste s rostoucím n , pro všechna $\{\varphi_j^0\}$. Pro tato schémata poté platí následující věta (WESSELING, 2001).

Věta 2. *Pokud má dané numerické schéma vlastnost TVD, pak také zachovává monotonicitu.*

1.4.2 Konzervativní zápis

V případě složitějšího (nelineárního) zákona zachování, než je rovnice advekce (1.48), je často výhodné zapisovat tento zákon v konzervativním tvaru jako

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(u)}{\partial y} = 0, \quad (1.51)$$

pro zákon zachování skalární veličiny ve dvou dimenzích, resp.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{f}(\mathbf{u})) = 0, \quad (1.52)$$

kde $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = (f(\mathbf{u}), g(\mathbf{u}))$, v případě vektoru. V případě advekčního členu v pohybových rovnicích (1.10) platí $\mathbf{f}(u) = \mathbf{u}u$. Také je možné použít integrální tvar, jako v pohybových rovnicích (1.8)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{u} \, d\Omega + \oint_S \mathbf{f}(\mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS. \quad (1.53)$$

V konzervativní formulaci pak můžeme zapisovat i numerické schéma, které získáme integrací (1.53) přes kontrolní objem. Pro jednoduchost budeme uvažovat pouze jednu prostorovou dimenzi ve směru x

$$\frac{\partial}{\partial t} u_j = - \frac{F_{j+1/2}(u) - F_{j-1/2}(u)}{\Delta x_j}, \quad (1.54)$$

kde numerické toky jsou definovány jako

$$F_{j\pm 1/2}(u) = F(u(x_{j\pm 1/2})) \quad (1.55)$$

a musí být předepsány konkrétně pro danou metodu. Hodnoty $u(x_{j\pm 1/2})$ jsou hodnoty proměnné u na stěnách kontrolního objemu a je třeba je zjistit vhodnou interpolací.

1.4.3 Semi-diskrétní schéma s vysokým rozlišením

Schéma použité v této práci vychází z článku (KURGANOV, TADMOR, 1999). Jde o semi-diskrétní schéma s vysokým rozlišením. Semi-diskrétní znamená, že je použita metoda přímek, tj. nejprve se provede prostorová diskretizace na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic, na kterou lze poté použít jakoukoli vhodnou metodu pro jejich řešení. Schéma s vysokým rozlišením je schéma které splňuje následující podmínky:

- Schéma je v oblastech s hladkým řešením alespoň druhého řádu přesnosti.
- Řešení neobsahuje nežádoucí oscilace.
- V oblastech diskontinuit je dosahováno vysoké přesnosti.
- Počet bodů sítě popisující danou vlnu je menší než u schématu prvního řádu se srovnatelnou přesností.

Toto schéma patří mezi godunovská schémata, která se vyznačují tím, že předpokládají polynomiální průběh veličiny v kontrolním objemu, podle kterého se pak konstruuje hodnoty na stěnách. Protože pro každou stěnu $j + 1/2$ se dají určit hodnoty $u_{j+1/2}$ z buňky nalevo a napravo, získáme tím dvě hodnoty které označíme $u_{j+1/2}^{\pm}$. Z těchto hodnot se poté pomocí numerické tokové funkce $F_{j+1/2}$ získá tok danou plochou.

Podle způsobu výpočtu numerických toků se godunovská schémata dělí na upwind schémata a centrální schémata. Klasická upwind schémata, jako např. původní Godunovo schéma (GODUNOV, 1959, 1999), řeší tzv. lokální Riemannovy problémy na stěnách. Pomocí nich se spočítá nové řešení, ze kterého se průměrováním přes jednotlivé kontrolní objemy získají nové hodnoty v buňkách. Riemannův problém se definuje jako

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} u^-, & x < 0, \\ u^+, & x > 0. \end{cases} \quad (1.56)$$

Další informace o upwind godunovských schématech lze nalézt například v pracích (van LEER, 1979; HARTEN, 1983; COLELLA, WOODWARD, 1984; TITAREV, TORO, 2004)

K řešení Riemannova problému je často třeba použít charakteristických souřadnic, k jejichž výpočtu je nutné určovat vlastní čísla Jacobiho matice $\left(\frac{\partial f_i(u)}{\partial x_j}\right)$. Proto je řešení Riemannova problému často velmi náročné a pro některé problémy není přesné řešení ani známo. V těchto případech bývá výhodné použít centrální godunovská schémata. Při jejich odvození se řešení Riemannova problému nepoužívá (viz KURGANOV, TADMOR, 1999; KURGANOV et al., 2001; HAGEN et al., bude vydán), a proto mohou být méně přesné. Jejich implementace je ovšem jednodušší a mohou být použity jako řešič typu „černá skříňka“. Navíc lze v případě vektorových zákonů zachování (1.52) řešit jednotlivé složky postupně, což v případě řešení Riemannova problému není možné.

Původní numerické toky, jako Laxův-Friedrichsův

$$F_{j+1/2}^{\text{LF}} = \frac{1}{2} \left[f(u_{j+1/2}^-) + f(u_{j+1/2}^+) \right] - \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} \left[u_{j+1/2}^+ - u_{j+1/2}^- \right] \quad (1.57)$$

a Laxův-Wendroffův

$$F_{j+1/2}^{\text{LW}} = f(Q^*), \quad (1.58)$$

$$Q^* = \frac{1}{2} \left[u_{j+1/2}^- + u_{j+1/2}^+ \right] - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[f(u_{j+1/2}^+) - f(u_{j+1/2}^-) \right],$$

používají k výpočtu pouze hodnoty $u_{j+1/2}^\pm$ a jsou proto velmi jednoduché. Přesnější jsou metody využívající informace o lokálních rychlostech šíření. V této práci je používána metoda podle (KURGANOV, TADMOR, 1999). Tato metoda používá pro zvýšení přesnosti lokální rychlost šíření v oblasti hranice, definovanou jako

$$a_{j+1/2} = \max_{u \in \mathcal{C}} \rho \left(\frac{\partial f(u)}{\partial u} \right), \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}(u_{j+1/2}^+, u_{j+1/2}^-), \quad (1.59)$$

kde ρ označuje spektrální poloměr matice a \mathcal{C} je křivka ve fázovém prostoru spojující $u_{j+1/2}^+$ a $u_{j+1/2}^-$. Tento výraz je poměrně komplikovaný, ale v praxi je možné se počítání vlastních čísel jakobiánu vyhnout, protože lze vektorové zákony zachování řešit po složkách. Pro nestlačitelné proudění je možno použít tvar (KURGANOV, LEVY, 2000)

$$a_{j+1/2,k}^x = |u_{j+1/2,k}|, \quad (1.60)$$

$$a_{j,k+1/2}^y = |v_{j,k+1/2}|. \quad (1.61)$$

Celý numerický tok má poté tvar

$$F_{j+1/2} = \frac{f(u_{j+1/2}^+) + f(u_{j+1/2}^-)}{2} - \frac{a_{j+1/2}}{2} [u_{j+1/2}^+ - u_{j+1/2}^-]. \quad (1.62)$$

Ve dvou dimenzích můžeme tedy celou metodu zapsat jako

$$\frac{d\bar{u}_{j,k}}{dt} = - \frac{F_{j+1/2,k}(t) - F_{j-1/2,k}(t)}{\Delta x_{j,k}} - \frac{G_{j,k+1/2}(t) - G_{j,k-1/2}(t)}{\Delta y_{j,k}}, \quad (1.63)$$

kde

$$F_{j+1/2,k}(t) = + \frac{f(u_{j+1/2,k}^+(t)) + f(u_{j+1/2,k}^-(t))}{2} - \frac{a_{j+1/2,k}^x(t)}{2} [u_{j+1/2,k}^+(t) - u_{j+1/2,k}^-(t)], \quad (1.64)$$

$$G_{j,k+1/2}(t) = + \frac{g(u_{j,k+1/2}^+(t)) + g(u_{j,k+1/2}^-(t))}{2} - \frac{a_{j,k+1/2}^y(t)}{2} [u_{j,k+1/2}^+(t) - u_{j,k+1/2}^-(t)]. \quad (1.65)$$

Rozšíření do tří rozměrů je přímočaré.

Použití tohoto centrálního schématu ve spojení s metodou postupných kroků k řešení rovnic nestlačitelného proudění pomocí primitivních proměnných (tj. přímo složek rychlosti) doporučují Grauer a Spanier v (SPANIER, 2002; GRAUER, SPANIER, 2003).

1.4.4 Po částech lineární rekonstrukce

Pro výpočet hodnot na stěnách $u_{j+1/2}^\pm$ je možno použít několik metod různých řádů přesnosti. V této práci je použita po částech lineární rekonstrukce podle (KURGANOV, TADMOR, 1999), která je druhého řádu. Jedná se vlastně o obdobu tzv. MUSCL schématu (van LEER, 1979). V této metodě se předpokládá, že v daném směru je průběh hodnoty veličiny kontrolním objemem lineární, při zachování průměrné hodnoty u_j

$$u(x) = u_j + s_j(x - x_j), \quad \text{pro } x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2}. \quad (1.66)$$

Koeficient sklonu s_j můžeme získat interpolací okolních hodnot, tzv. rekonstrukcí. V úvahu přicházejí následující tři možnosti:

$$s_j^- = \frac{u_j - u_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, \quad s_j^C = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{x_{j+1} - x_{j-1}}, \quad s_j^+ = \frac{u_{j+1} - u_j}{x_{j+1} - x_j}. \quad (1.67)$$

Z těchto tří možností je třeba použít tu, která nezpůsobí vznik nového maxima či minima. Proto se zavádí nelineární funkce – tzv. omezovač sklonu či slope limiter (dále jen limiter), jenž má omezit sklon jehož může rekonstrukce dosáhnout. Nejjednodušší je minmod limiter, definovaný jako

$$\text{minmod}(a, b, c) = \begin{cases} \min(a, b, c) & \text{pokud } a, b, c \geq 0, \\ \max(a, b, c) & \text{pokud } a, b, c \leq 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (1.68)$$

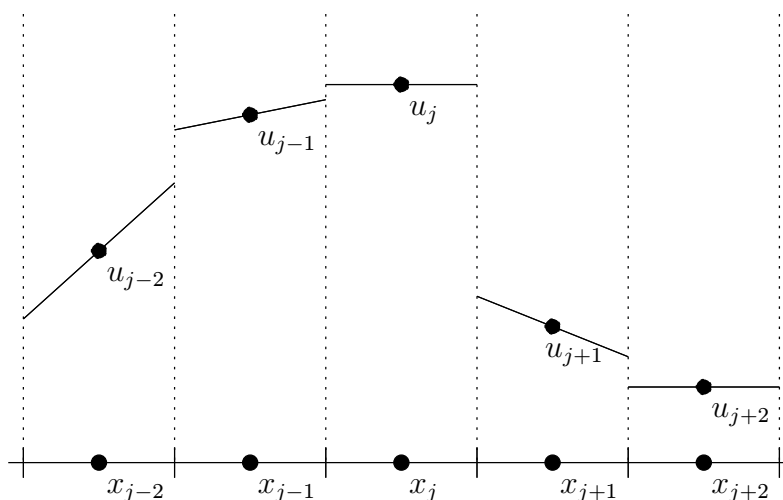
Sklon s_j pak získáme z výrazu

$$s_j = \text{minmod}(\theta s_j^-, s_j^C, \theta s_j^+), \quad (1.69)$$

kde θ je parametr, který ovlivňuje, jak velký sklon bude zvolen. Standardní hodnota je $\theta = 1$. Hodnoty vyšší než 1 znamenají, že budou voleny větší sklony a metoda bude mít menší numerickou viskozitu. Příliš velké hodnoty θ ovšem mohou způsobit vznik oscilací.

Věta 3. *Semi-diskrétní schéma (1.62) pro skalární veličinu, s hodnotami $u_{j\pm 1/2}^\pm$ počítanými podle (1.69), má vlastnost TVD pro $1 \leq \theta \leq 2$.*

Důkaz této věty je možno nalézt v (KURGANOV, TADMOR, 1999). Přestože tato věta platí pouze ve skalárním případě, nedochází v praxi ke vzniku nežádoucích oscilací ani v případě vektorů.



Obrázek 1.3: Příklad po částech lineární rekonstrukce

1.4.5 TVD metoda Runge-Kutta

Soustavu obyčejných diferenciálních rovnic (1.63) lze řešit libovolnou stabilní metodou. Ne každá ovšem zaručuje zachování vlastnosti TVD. Proto byla vytvořena skupina lineárních vícekrokových metod (SHU, 1988) a metod Runge-Kutta (SHU, OSHER, 1988), které tuto vlastnost zachovávají. Metody Runge-Kutta mají výhodu ve větší stabilitě při delších časových krocích a ve snadnější implementaci proměnné délky časového kroku. Proto je v této práci používána TVD metoda Runge-Kutta druhého řádu ve tvaru

$$u^* = u^n + \Delta t L(u^n), \quad (1.70)$$

$$u^{n+1} = \frac{1}{2}u^n + \frac{1}{2}u^* + \frac{1}{2}\Delta t L(u^*), \quad (1.71)$$

kde L je pravá strana soustavy (1.63). Jedná se vlastně o klasické Heunovo schéma. Tato metoda zachovává vlastnost TVD až do $\text{CFL} = 1$, kde číslo CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) je definované jako

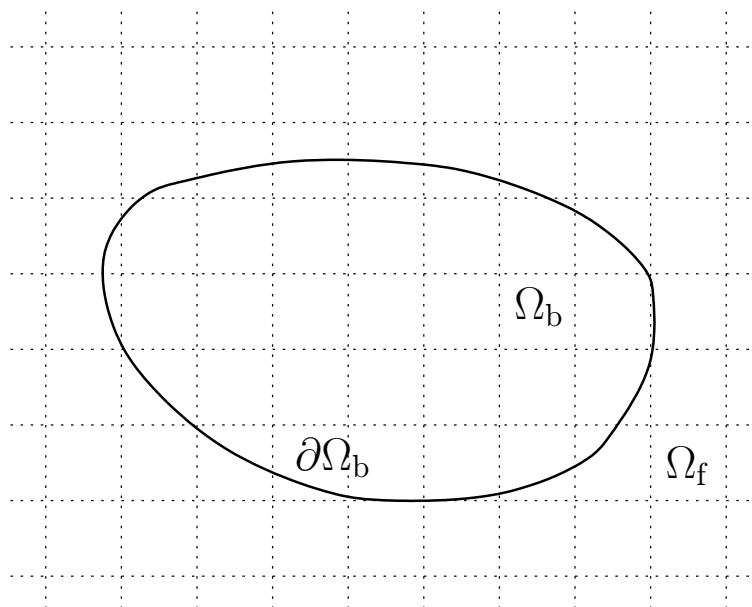
$$\text{CFL} = \Delta t \max \left(\frac{|u|}{\Delta x}, \frac{|v|}{\Delta y}, \frac{|w|}{\Delta z} \right). \quad (1.72)$$

Ve spojení s (1.63) je pak podle (KURGANOV, TADMOR, 1999) třeba splnit podmínku

$$\text{CFL} \leq \frac{1}{8}. \quad (1.73)$$

1.5 Metoda vnořené hranice

Proudění ve složité geometrii je možno řešit pomocí několika přístupů. Tradiční přístup je pomocí početní sítě, která kopíruje hranice překážek. Často se přitom používají nestrukturované sítě, jejichž příprava může být poměrně náročná. Jiná možnost je metoda vnořené hranice (immersed boundary method). K výpočtu je možno použít jednoduchou strukturovanou ortogonální síť, například kartézskou či sférickou, ve které je formulace rovnic jednoduchá a nedochází ke ztrátě řádu přesnosti. V tomto případě ovšem obecně nesouhlasí pozice bodů hranice objektů a bodů výpočetní sítě. Proto se nedá hraniční podmínka na pevné hranici použít přímo, ale do pohybových rovnic se přidají další členy. Metoda vnořené hranice umožňuje použít výhod kartézské sítě, ovšem na druhé straně je třeba počítat s potřebou o něco hustší sítě, než u sítí kopírující tělesa (MITTAL, IACCARINO, 2005).



Obrázek 1.4: Vnořená hranice a výpočetní síť

Vezměme jednoduchý případ obtékání pevného tělesa (MITTAL, IACCARINO, 2005). Proudění se řídí Navierovými-Stokesovými rovnicemi:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u} = 0 \quad \text{a} \quad (1.74)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{v } \Omega_f, \quad (1.75)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\partial\Omega_b} \quad \text{na } \partial\Omega_b. \quad (1.76)$$

Pevné těleso tvoří oblast Ω_b , okolní tekutina oblast Ω_f a hranice mezi nimi je značena $\partial\Omega_b$ (obr. 1.4). Zkráceně můžeme tento systém zapsat jako

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}) = 0 \quad \text{v } \Omega_f, \quad (1.77)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_{\partial\Omega_b} \quad \text{na } \partial\Omega_b, \quad (1.78)$$

kde $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{u}, p)$ a \mathcal{L} je operátor představující Navierovy-Stokesovy rovnice.

V klasickém případě početní síť kopírující hranice tělesa můžeme hraniční podmínky přímo předepsat v příslušných bodech. V případě metody vnořené hranice tento přístup není možný. Protože řešíme rovnice v bodech které nesouhlasí s body hranice, musíme modifikovat rovnice. V rámci metody vnořené hranice jsou dvě možnosti jak implementovat dodatečné členy.

1.5.1 Spojitá zdrojová funkce

První varianta vyvinutá Peskinem (1982) pro simulace proudění krve v cévách spočívá v modifikaci původní spojité rovnice (1.20) o zdrojovou funkci (forcing) $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{f}_u, f_p)$ na pravé straně. Rovnice pak nabývá tvar

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}) = \mathbf{f}, \quad (1.79)$$

který platí v celé oblasti ($\Omega_f \cup \Omega_b$). Tuto rovnici poté můžeme diskretizovat na naší síti pomocí vhodných metod a dostaneme diskrétní systém

$$[L]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{f}\}, \quad (1.80)$$

který řešíme ve všech bodech sítě. Dodatečné členy se často počítají pomocí zpětné vazby od elastických stěn (GOLDSTEIN et al., 1993). Pevné stěny je pak třeba modelovat jako velmi tuhé elastické stěny. Tato metoda má bohužel problém se stabilitou při delších časových krocích. Dosahované číslo CFL je často řádu 10^{-2} (GOLDSTEIN et al., 1993).

1.5.2 Diskrétní zdrojová funkce

Druhou možností je nejprve diskretizovat původní rovnice na celé síti bez ohledu na vnořenou hranici. Získáme tak soustavu rovnic

$$[L]\{\mathbf{U}\} = 0. \quad (1.81)$$

Tuto soustavu musíme pozměnit v bodech v blízkosti hranice na tvar

$$[L']\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{r}\}, \quad (1.82)$$

kde modifikovaný operátor L' a pravá strana \mathbf{r} představují dodatečné členy v rovnici. Rovnici (1.82) můžeme přepsat do tvaru

$$[L](\mathbf{U}) = \{\mathbf{f}'\}, \quad (1.83)$$

kde $\mathbf{f}' = \{\mathbf{r}\} + [L]\{\mathbf{U}\} - [L']\{\mathbf{U}\}$.

Tato diskrétní verze byla poprvé využita Mohd-Yusofem (1997), který k diskretizaci použil spektrální metodu a zavedl zdroje hybnosti v bodech uvnitř vnořeného tělesa. Tento přístup byl dále rozveden v práci (FADLUN et al., 2000), která převedla metodu Mohd-Yusofa na metodu konečných diferencí. V této modifikaci se aplikovaly zdroje hybnosti pouze v bodech uvnitř tekutiny, bezprostředně sousedících s vnořenou hranicí. Rychlost v bodě nejbližší k vnořené hranici se získá lineární interpolací rychlosti na hranici a rychlosti v druhém nejbližším bodě, což je ekvivalentní zdroji hybnosti v okrajových bodech uvnitř tekutiny. Tuto metodu můžeme zapsat zkráceně jako

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \mathbf{RHS}^{n+1/2} + \mathbf{f}, \quad (1.84)$$

kde \mathbf{RHS} jsou advekční, viskózní a další členy a \mathbf{f} jsou zdroje hybnosti u vnořené hranice. Tyto zdroje zjistíme úpravou rovnice (1.84)

$$\mathbf{f} = -\mathbf{RHS}^{n+1/2} + \frac{\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t}, \quad (1.85)$$

kde \mathbf{V}^{n+1} je rychlost které chceme docílit v daném bodě, získaná lineární interpolací okolních hodnot.

Další variantu přinesla práce (KIM et al., 2001), která vychází z (FADLUN et al., 2000) a upravila ji pro metodu konečných objemů. Oproti (FADLUN et al., 2000) zavádí zdroje hybnosti jen uvnitř vnořeného tělesa. Navíc opravuje rovnici kontinuity v blízkosti hranice o zdroje hmoty q . Pro časovou diskretizaci byla použita metoda postupných kroků ve variantě PmII (1.33) – (1.39). Postup řešení lze napsat jako

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + [\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})]^{n+1/2} = -\nabla p^{n-1/2} + \quad (1.86)$$

$$+ \frac{1}{2\text{Re}} \nabla^2 (\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^*) + \mathbf{f},$$

$$\Delta t \nabla^2 \phi^{n+1} = \nabla \cdot \mathbf{u}^* - q \quad \text{v } \Omega, \quad (1.87)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi^{n+1} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \quad (1.88)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \phi^{n+1}, \quad (1.89)$$

$$p^{n+1/2} = p^{n-1/2} + \phi^{n+1} - \frac{\Delta t}{2\text{Re}} \nabla^2 \phi^{n+1}. \quad (1.90)$$

1.5.3 Zdroje hybnosti a hmoty

Zdroje hybnosti \mathbf{f} můžeme podle (KIM et al., 2001) spočítat obdobným způsobem jako v (1.85). Nejprve se u hranice provizorně diskretizuje rovnice (1.86) pomocí explicitního schématu

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + [\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})]^{n+1/2} = -\nabla p^{n-1/2} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u}^n + \mathbf{f}. \quad (1.91)$$

a vypočtou se tak hodnoty rychlosti $\tilde{\mathbf{u}}$. Pomocí těchto hodnot pak získáme interpolací, která bude popsána dále, rychlost \mathbf{U} , které chceme dosáhnout v bodech uvnitř tělesa, sousedících s vnořenou hranicí. Velikost zdroje hybnosti \mathbf{f} zjistíme přeskupením členů v (1.91)

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{U} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + [\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})]^{n+1/2} + \nabla p^{n-1/2} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u}^n. \quad (1.92)$$

Zdroje hmoty pak lze získat z rovnice

$$q = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \omega \mathbf{u}^* \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta S_i, \quad (1.93)$$

kde ΔV je objem kontrolního objemu a ΔS_i jsou povrchy jeho stěn. Funkce ω je definována jako 1 pro stěnu s nenulovým zdrojem hybnosti a jako 0 jinde.

1.5.4 Interpolace rychlosti

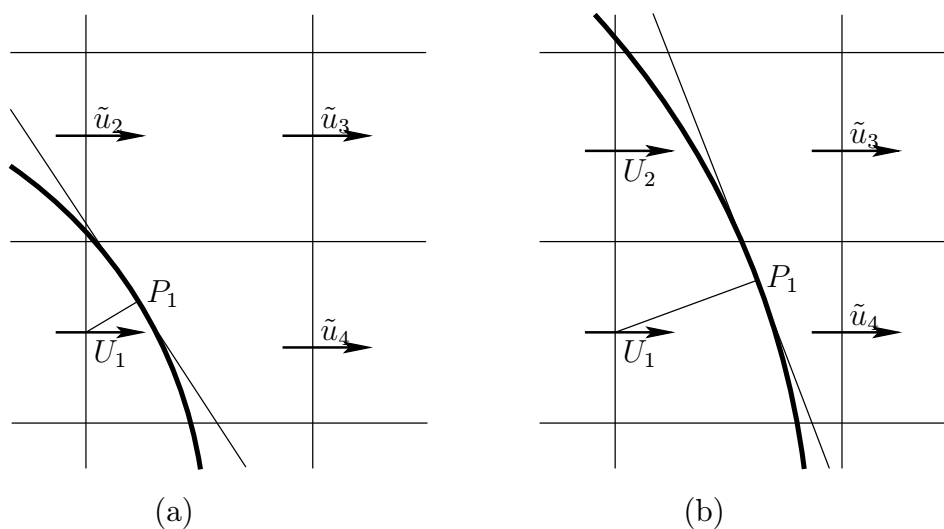
Hodnoty U v rovnici (1.92) je třeba získat interpolací hodnot $\tilde{\mathbf{u}}$ alespoň druhého řádu přesnosti. V článku (KIM et al., 2001) se používá bilineární a lineární interpolace. Bilineární interpolace se používá v případě, že nejbližší bod hranice P_1 není obklopen jiným bodem se zdrojem hybnosti. Situace je jasněji zobrazena na obrázku 1.5(a). V opačném případě (viz obrázek 1.5(b)) se použije lineární interpolace, s pomocí bodu hranice P_2 , který leží na spojnici s bodem sítě na druhé straně hranice.

Postup lineární interpolace osvětluje obrázek 1.6(a) a 1.6(b). Záleží na poměru vzdálenosti od hranice h a vzdálenosti hranice a nejbližšího bodu za hranicí y_A . Výsledný vztah můžeme zapsat jako

$$U_1 = \begin{cases} -\frac{h}{y_A} \tilde{u}_A & \text{pro } 0 < h \leq y_A, \\ -\frac{(y_B-h)\tilde{u}_A + (h-y_A)\tilde{u}_B}{y_B-y_A} & \text{pro } y_A < h < y_B. \end{cases} \quad (1.94)$$

V případě bilineární interpolace je situace znázorněna na obrázku 1.7. K výpočtu se používá vztah

$$U_1 = -[\alpha(1-\beta)\tilde{u}_2 + (1-\alpha)(1-\beta)\tilde{u}_3 + (1-\alpha)\beta\tilde{u}_4] / \alpha\beta, \quad (1.95)$$



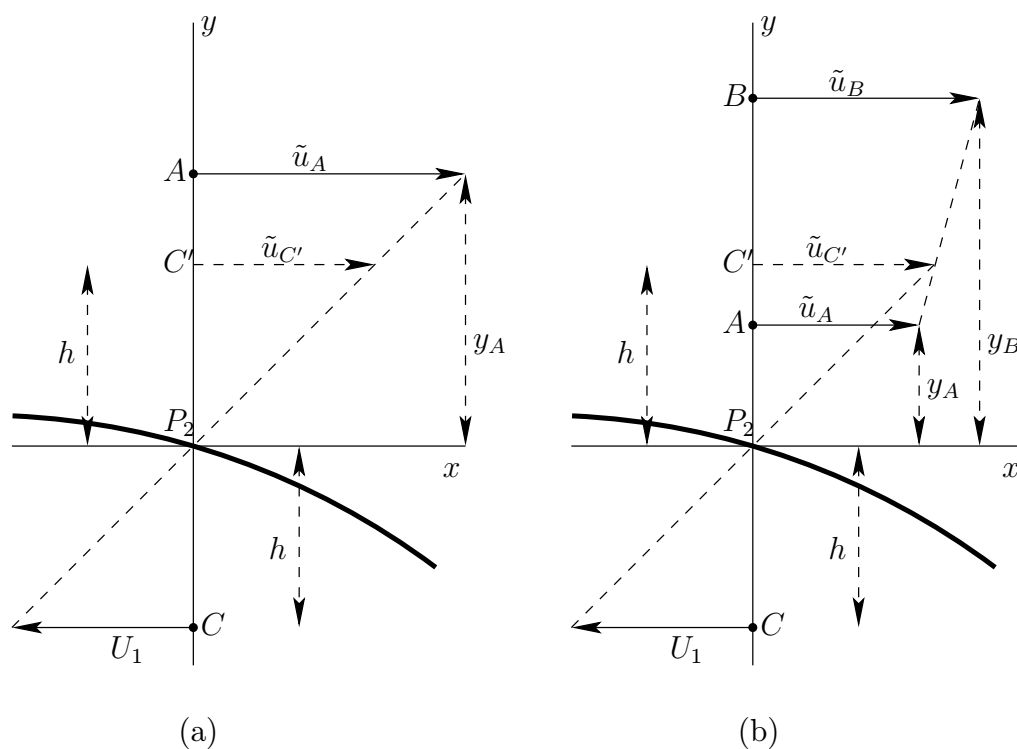
Obrázek 1.5: Příklady pro použití bilineární a lineární interpolace. Body U_1 a U_2 jsou uvnitř tělesa.

kde

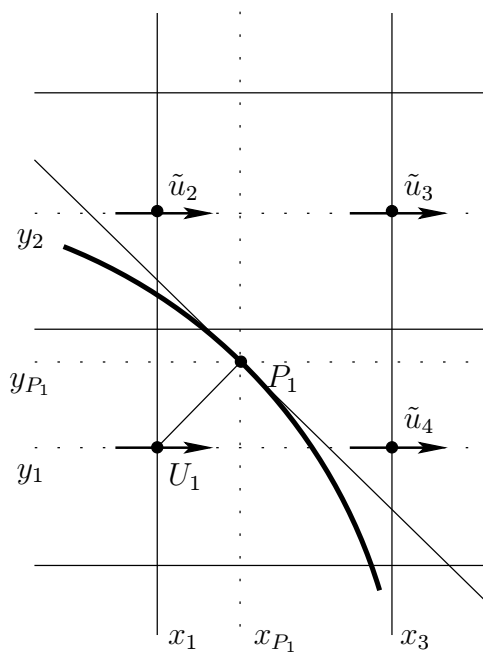
$$\alpha = (x_3 - x_{P_1}) / (x_3 - x_1), \quad (1.96)$$

$$\beta = (y_2 - y_{P_1}) / (y_2 - y_1). \quad (1.97)$$

Ve třech dimenzích jsou vztahy obdobné, pouze může nastat další případ, kdy se k bilineární interpolaci použije 7 sousedních bodů.



Obrázek 1.6: Lineární interpolace



Obrázek 1.7: Bilineární interpolace

Kapitola 2

Struktura programu

2.1 Základní popis

V této kapitole bude popsána struktura programové realizace modelu a některé podrobnosti implementace jednotlivých metod. Zdrojový kód je napsán v jazyce Fortran 95. K jeho kompilaci byly použity kompilátory Intel Fortran Compiler 9.0 a NAGware Fortran 95 Release 5.0. Program řeší Navierovy-Stokesovy rovnice v bezrozměrném tvaru (1.16) a (1.20) ve dvou rozměrech. K prostorové diskretizaci je použita obecně nerovnoměrná kartézská síť. Díky tomu, že jde o strukturovanou síť, jsou jednotlivé proměnné ukládány do jednoduchých dvojrozměrných polí – například $u(j, k)$, $v(j, k)$ apod. Číslování indexů je znázorněno na obr. 2.1, na kterém lze také nalézt označení souřadnic sítě.

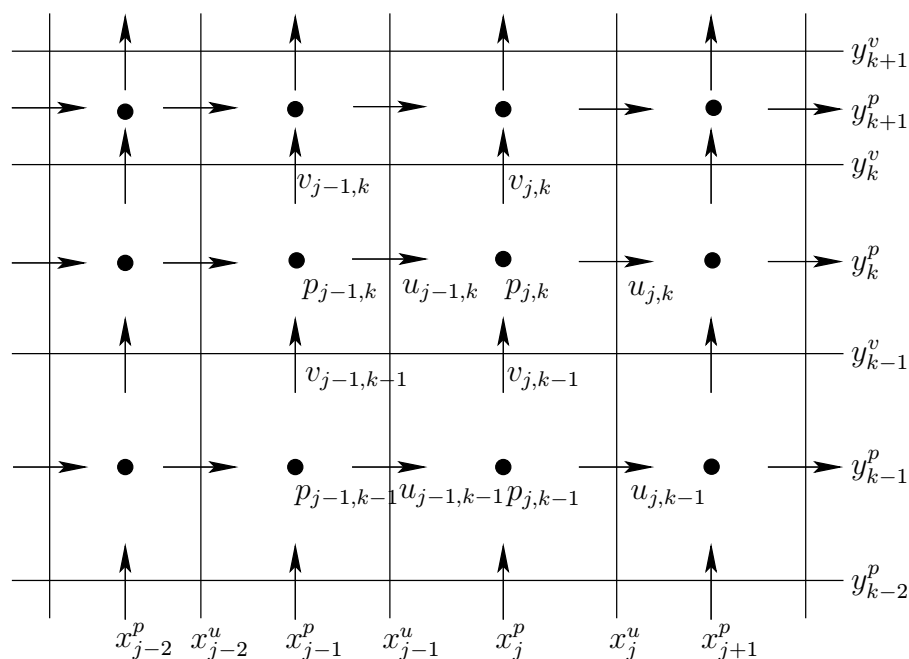
Případná vnořená hranice je uložena jako jednorozměrné pole, obsahující seznam jednotlivých bodů, ve kterých působí zdroje hybnosti, spolu s dalšími podrobnostmi o lokální povaze hranice, jako je její poloha a způsob interpolace který se má použít k výpočtu zdrojů.

2.2 Průběh výpočtu

2.2.1 Základní schéma

Běh programu probíhá podle vývojového diagramu, který je znázorněn na obrázku 2.2. Výpočet stacionárního proudění probíhá jako výpočet nestacionárního, ale jen do té doby, než

$$\left\{ \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\| \right\}^{n+1} = \frac{\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|}{\Delta t} < \varepsilon, \quad (2.1)$$



Obrázek 2.1: Značení proměnných v početní síti

kde $\|\cdot\|$ označuje normu a ε je vhodně zvolené kladné číslo.

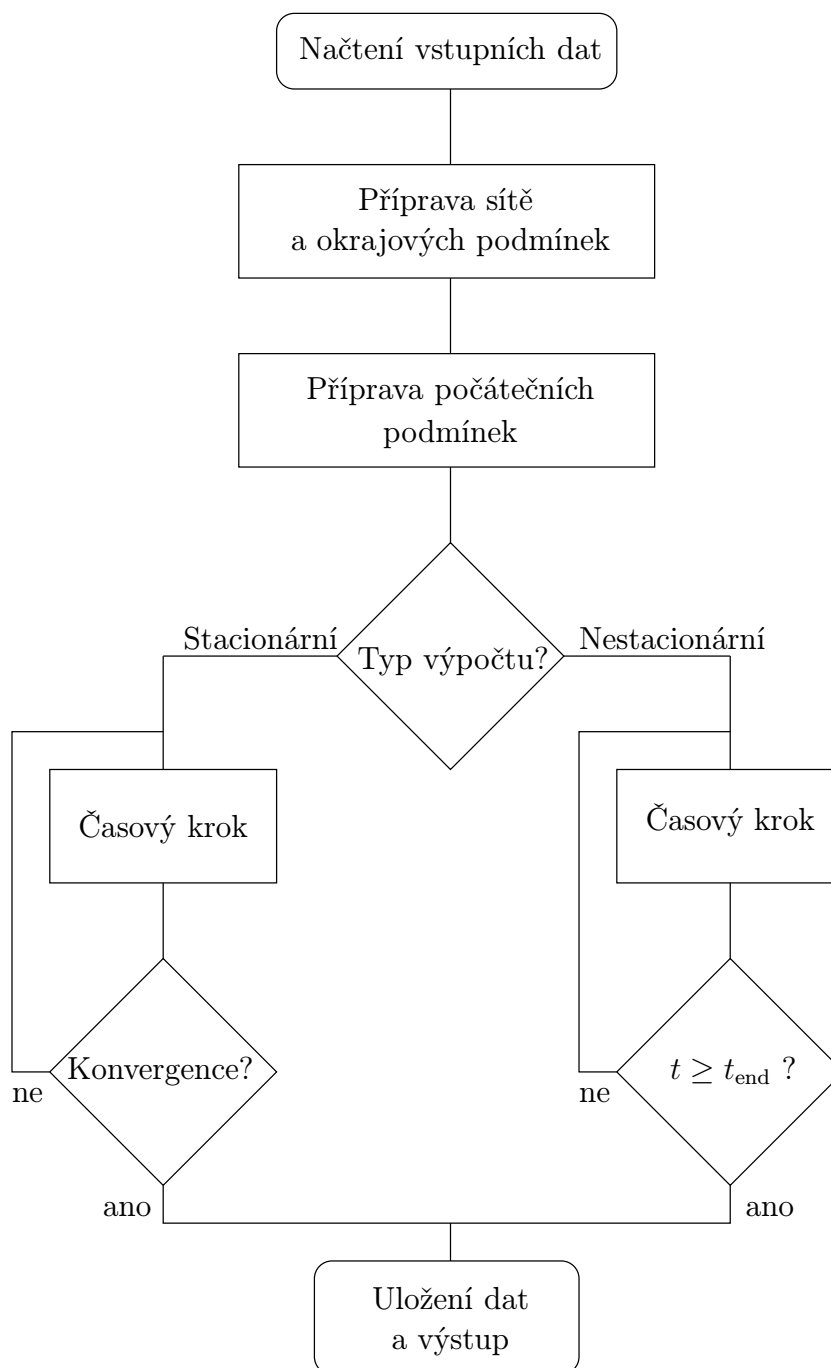
2.2.2 Implementace metod

Průběh časového kroku je zobrazen na obrázku (2.3). Nejdříve se spočítá hodnota advekčních členů podle schématu (1.63) s časovou diskretizací metodou Runge-Kutta (1.70). Zde je třeba vyřešit problém kombinace godunovovské metody a posunuté sítě. V tomto programu se při výpočtu toku složky u ve směru y používá složka v interpolovaná do sítě pro u a naopak. Pro parametr minmod limiteru θ byla při všech výpočtech použita hodnota $\theta = 2$.

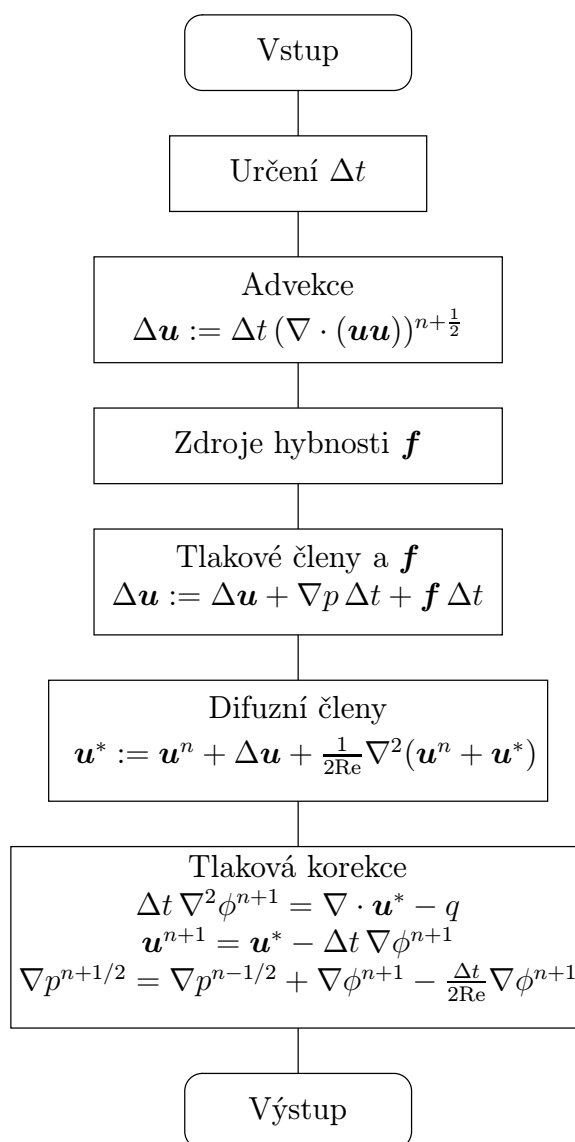
Poté se spočtou zdroje hybnosti podle (1.92). Ty se, spolu s advekčními členy a členy tlakového gradientu z minulého kroku, přičtou k počáteční rychlosti. Členy tlakového gradientu se spočítají, díky vlastnostem posunuté sítě, jednoduše ve tvaru

$$\left\{ \frac{\partial p}{\partial x} \right\}_{j,k} = \frac{p_{j+1,k}(x) - p_{j,k}(x)}{x_{j+1}^p - x_j^p}. \quad (2.2)$$

V dalším kroku se spočítají difuzní členy. Jejich prostorová diskretizace



Obrázek 2.2: Vývojový diagram



Obrázek 2.3: Schéma jednoho časového kroku

je provedena podle (1.42) jako

$$\{\nabla^2 u\}_{j,k} = \frac{\frac{u_{j+1,k} - u_{j,k}}{x_{j+1}^u - x_j^u} - \frac{u_{j,k} - u_{j-1,k}}{x_j^u - x_{j-1}^u}}{x_{j+1}^p - x_j^p} + \frac{\frac{u_{j,k+1} - u_{j,k}}{y_{k+1}^p - y_k^p} - \frac{u_{j,k} - u_{j,k-1}}{y_k^p - y_{k-1}^p}}{y_k^v - y_{k-1}^v}. \quad (2.3)$$

Pro časovou diskretizaci je použita metoda Cranka a Nicolsonové (1.33). Protože jde o implicitní metodu, je třeba vyřešit vzniklou soustavu rovnic. Zde se používá Gaussova-Seidelova iterace (viz 2.2.3) z první aproximace, získané z časové diskretizace pomocí explicitní Eulerovy metody. Obvykle stačí pouze několik iterací.

2.2.3 Tlaková korekce

Poté co se pomocí pohybové rovnice (1.33) získá rychlost u^* , je ještě potřeba provést opravu na splnění rovnice kontinuity pomocí tlakové korekce. K tomu je třeba vyřešit Poissonovu rovnici (1.35) s okrajovými podmínkami (1.36). Prostorová diskretizace Laplaceova operátoru je provedena stejným způsobem, jako v (2.3). Výsledná soustava algebraických rovnic se řeší pomocí iterační Gaussovy-Seidelovy metody. Pokud zapíšeme diskretizovanou rovnici (1.35) zkráceně ve tvaru

$$\begin{aligned} A_{j,k}^P \phi_{j,k} + A_{j,k}^E \phi_{j+1,k} + A_{j,k}^W \phi_{j-1,k} + A_{j,k}^N \phi_{j,k+1} + A_{j,k}^S \phi_{j,k-1} &= b_{j,k}, \\ j &= 1, \dots, n_j, \\ k &= 1, \dots, n_k, \end{aligned} \quad (2.4)$$

můžeme Gaussovu-Seidelovu metodu zapsat jako

$$\phi_{j,k}^{n+1} = \frac{1}{A} (b_{j,k} - A_{j,k}^E \phi_{j+1,k} - A_{j,k}^W \phi_{j-1,k} - A_{j,k}^N \phi_{j,k+1} - A_{j,k}^S \phi_{j,k-1}), \quad (2.5)$$

kde hodnoty ϕ na pravé straně jsou buď z iterace $n + 1$, pokud již byly v této iteraci spočteny, nebo z iterace n . Jako počáteční odhad se v této práci používá $\phi = 0$. Protože metoda tlakové korekce neurčuje absolutní hodnotu tlaku, ale pouze její změnu, je hodnota tlaku určována tak, že je v jednom bodě udržována konstantní a hodnota v ostatních bodech znamená rozdíl vůči tomuto bodu.

2.3 Okrajové a počáteční podmínky

2.3.1 Okrajové podmínky

Nedílnou součástí řešení parciálních diferenciálních rovnic jsou okrajové podmínky. V tomto modelu jsou implementovány pomocí fiktivních kontrolních objemů (ghost cells) za hranicí skutečné početní sítě. Hodnoty proměnných v těchto buňkách jsou získány pomocí lineární extrapolace tak, aby na hranici měly požadovanou hodnotu. Jde o stejný princip, jako v případě vnořené hranice, ale implementace je jednodušší, protože se hranice početní oblasti shodují s hranicemi kontrolních objemů pro skalární veličiny.

Používány jsou dva základní druhy okrajových podmínek, Dirichletovy a Neumannovy. Dirichletova podmínka znamená předepsanou hodnotu proměnné na hranici. V případě Neumannovy podmínky se předepisuje hodnota derivace ve směru normály k hranici. Obvykle je tato hodnota nulová. Tyto okrajové podmínky lze použít v těchto kombinacích:

- i) Dirichletova podmínka pro obě složky rychlosti – Používá se na vstupní hranici nebo na pevných stěnách.
- ii) Neumannova podmínka pro obě složky rychlosti – Používá se na výstupu z oblasti.
- iii) Neumannova podmínka pro tečnou složku rychlosti a Dirichletova pro normálovou složku (free-slip boundary condition) – Tato podmínka znamená nulový tok hranicí. Jde vlastně o pevnou stěnu, na které ovšem neulpívá tekutina. Zároveň lze tuto podmínku interpretovat jako rovinu symetrie.

Díky vlastnostem posunuté sítě nejsou potřeba okrajové podmínky pro tlak. Pouze pseudotlak ϕ musí při tlakové korekci splňovat podmínku (1.36).

2.3.2 Počáteční podmínky

V případě, že neznáme vhodné počáteční podmínky, lze použít jakýkoli odhad, splňující okrajové podmínky a rovnici kontinuity. Nedivergentnost lze zajistit například jedním krokem tlakové korekce (1.35).

2.4 Výstupní data

Pro ukládání polí je použit otevřený formát VTK. Pro jejich zpracování se používá například open-source nástroj Kitware Paraview. Dale se během vý-

počtu ukládal časový průběh některých veličin, jako například koeficient odporu nebo koeficient vztlaku.

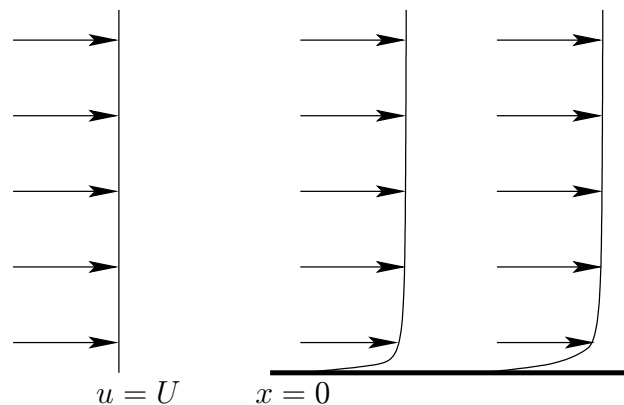
Kapitola 3

Výsledky

K ověření funkčnosti modelu bylo třeba spočítat několik zkušebních případů proudění, pro které je známo analytické nebo alespoň numerické řešení. Výběr byl proveden tak, aby bylo možno vyzkoušet jak stacionární proudění, tak proudění proměnné s časem. Dále bylo třeba vyzkoušet proudění kolem tělesa popsaného pomocí vnořené hranice tak, aby se použily oba způsoby interpolace.

3.1 Proudění nad hladkou deskou

3.1.1 Popis problému



Obrázek 3.1: Mezní vrstva nad hladkou deskou

První zkoumaný případ byla laminární mezní vrstva, vznikající nad hladkou deskou, nad kterou je přivedeno neporušené konstantní proudění. Situaci

znázorňuje obrázek 3.1. Do určité vzdálenosti nad deskou dojde k vytvoření tenké mezní vrstvy, ale zbytek rychlostního pole zůstane neporušený. Tento případ je možné řešit analyticky pomocí aproximace mezní vrstvy, kterou pro tento případ poprvé použil Blasius. Detailní odvození lze nalézt například v knize (Batchelor, 2000). Aproximace mezní vrstvy předpokládá, že

$$\text{Re}_x = \sqrt{\frac{Ux}{\nu}} \gg 1, \quad (3.1)$$

kde U je rychlost neporušeného proudu a x vzdálenost od hrany desky. Proto následující řešení neplatí v blízkosti náběžné hrany.

Řešení lze vyjádřit v sobě podobném tvaru pomocí souřadnice

$$\eta = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}, \quad (3.2)$$

a funkce $f(\eta)$, která splňuje diferenciální rovnici

$$2\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + f\frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, \quad (3.3)$$

s okrajovými podmínkami

$$f(0) = 0, \quad (3.4)$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = 0, \quad (3.5)$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \eta}\right|_{\eta \rightarrow \infty} = 1. \quad (3.6)$$

$$(3.7)$$

Složky rychlosti poté mají tvar

$$u = \frac{\partial f}{\partial \eta} U, \quad (3.8)$$

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial \eta} - f \right). \quad (3.9)$$

Rovnici 3.3 nelze řešit analyticky, ale pouze s použitím numerických metod. Metodou střelby spolu s metodou Runge-Kutta (1.70) můžeme zjistit hodnotu druhé derivace na povrchu desky

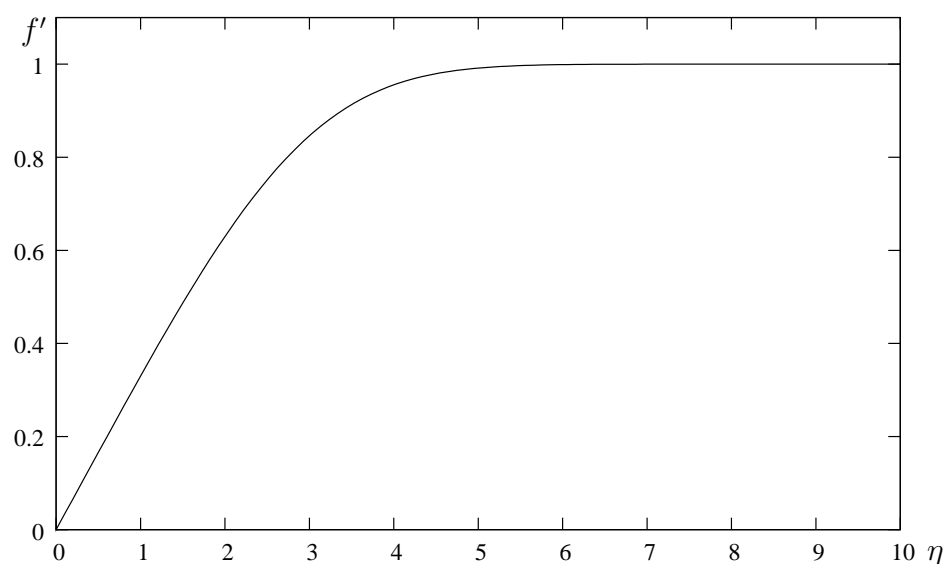
$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=0} \doteq 0,332. \quad (3.10)$$

V grafu 3.2 je znázorněn profil $f'(\eta) = u/U$. Můžeme vidět, že pro

$$\eta \doteq 5,0, \quad (3.11)$$

dosahuje u přibližně rychlosti neporušeného pole, a proto je hodnota (3.11) považována za hranici mezní vrstvy. Pomocí skutečné proměnné y můžeme tloušťku mezní vrstvy vyjádřit ve tvaru

$$\delta = \frac{5,0 x}{\sqrt{\text{Re}_x}}. \quad (3.12)$$



Obrázek 3.2: Závislost $f'(\eta) = u/U$ na η

Proměnnou, která je vhodná pro kontrolu přesnosti modelu, je koeficient tření na desce, definovaný jako

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2}, \quad (3.13)$$

kde

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}. \quad (3.14)$$

Po dosazení dostaneme s využitím (3.10)

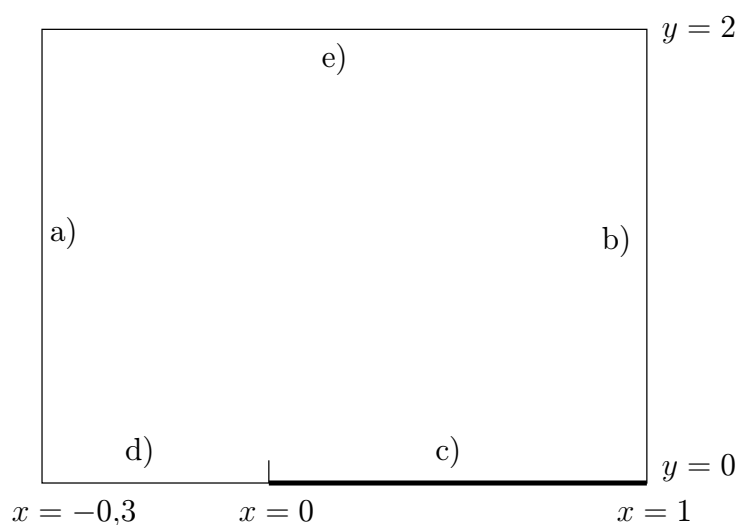
$$C_f = \frac{0,664}{\sqrt{\text{Re}_x}}. \quad (3.15)$$

3.1.2 Parametry výpočtu

K výpočtu byla použita metodika podle (DOBEŠ, 2003). Výpočetní oblast byla zvolena tak, aby obsahovala i určitou část před hranou desky, jak je vidět na obrázku 3.3. Délka desky byla zvolena jednotková. Na jednotlivých stěnách byly použity tyto okrajové podmínky:

- a) vstup – Dirichletova podmínka $u = U, v = 0$,
- b) výstup – Neumannova podmínka $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$,
- c) deska – pevná stěna,
- d) a e) free-slip okrajová podmínka.

Free-slip podmínka na horním okraji oblasti neodpovídá Blasiovu řešení, které předpokládá nenulovou hodnotu vertikální rychlosti v . Stejně tak homogenní Neumannova podmínka na výstupu neodpovídá proudění v konečné vzdálenosti od hrany desky.



Obrázek 3.3: Okrajové podmínky

K výpočtu byla použita rovnoměrná síť ve směru x a nerovnoměrná síť ve směru y . Nerovnoměrná síť byla vygenerována tak, že prvních patnáct kontrolních objemů pokrývalo celou mezní vrstvu. Jejich vertikální rozměr byl $7,5 \cdot 10^{-4}$. Následující kontrolní objemy měly vždy velikost předchozího, vynásobenou koeficientem 1,2, až do dosažení horní hranice $y = 2$. Celkově měla síť rozměry 266×50 kontrolních objemů.

Aby se mohl snadno použít model s rovnicemi v bezrozměrném tvaru, byla zvolena jednotková velikost hustoty. Dále byla zvolena velikost Reynoldsova čísla na výstupu

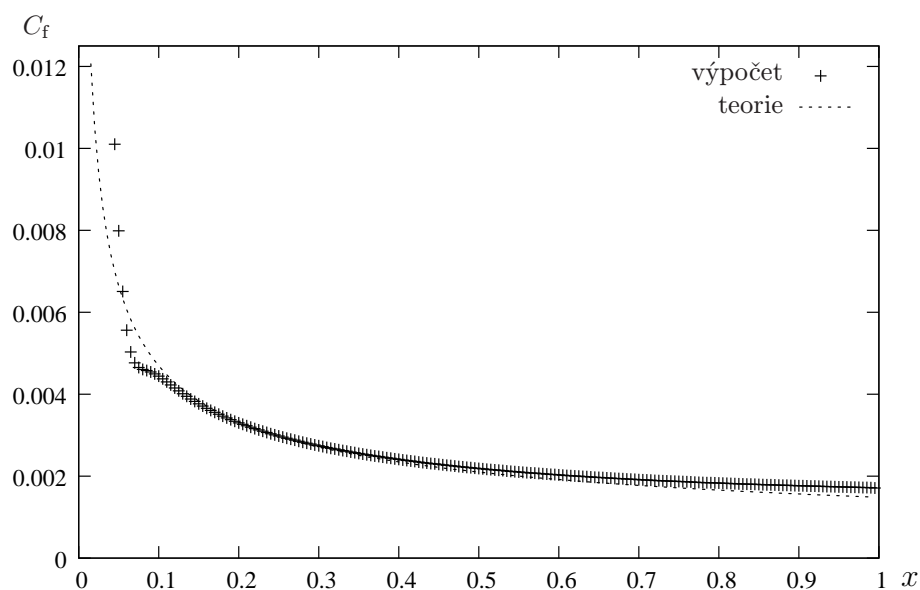
$$\text{Re}_x = \text{Re} = 2 \cdot 10^5 \quad (3.16)$$

tak, aby byla splněna podmínka (3.1). Velikost viskozity byla proto

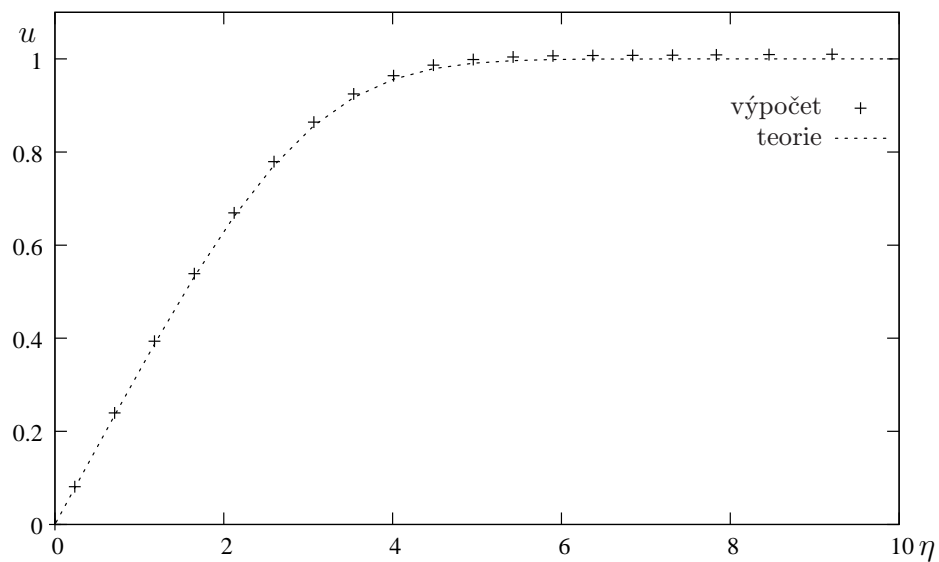
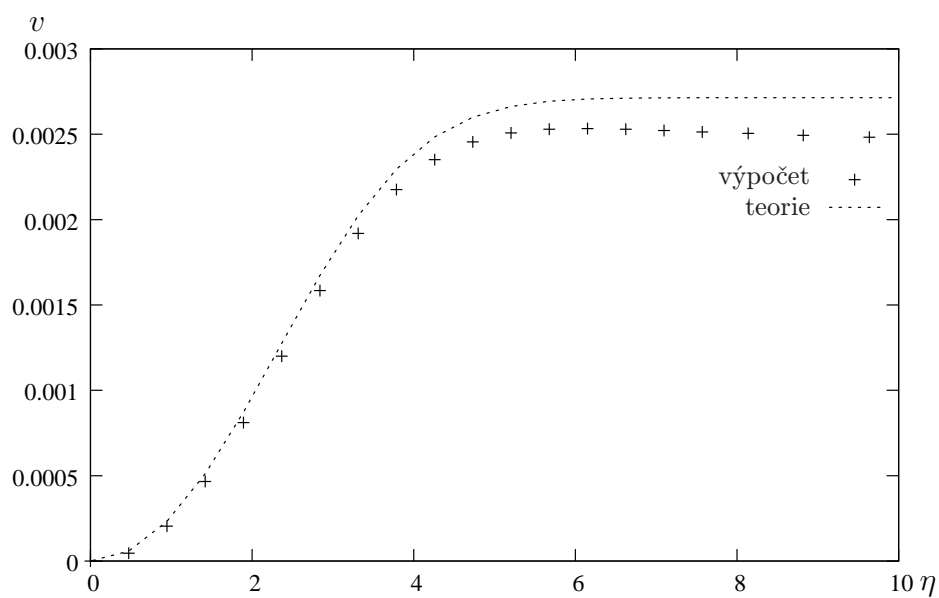
$$\nu = 5 \cdot 10^{-6}. \quad (3.17)$$

3.1.3 Výsledky simulace

V grafu 3.4 je zobrazen průběh výsledného koeficientu tření. Je vidět velká odchylka v blízkosti náběžné hrany a další odchylka u výstupu. Přesto se výsledek poměrně dobře shoduje s teoretickými předpoklady. V grafech 3.5 a 3.6 jsou znázorněny profily složek rychlosti u a v ve vzdálenosti $x = 0,5$. Profil u se s Blasiovým řešením shoduje velmi dobře. Jinak je tomu u složky v , u které se pravděpodobně projevuje okrajová podmínka na horní hranici početní oblasti.



Obrázek 3.4: Koeficient tření C_f

Obrázek 3.5: Profil u pro $x = 0,5$ Obrázek 3.6: Profil v pro $x = 0,5$

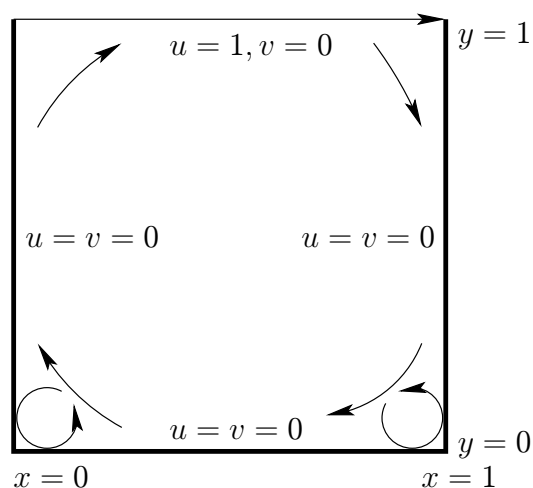
3.2 Proudění v dutině se čtvercovým průřezem

3.2.1 Popis problému

Dalším případem, který je velmi často používán pro testování modelů pro nestlačitelné proudění, je proudění v nekonečné dutině čtvercového průřezu (square cavity). Je to dáno tím, že okrajové podmínky i příprava sítě jsou velmi jednoduché. Schematicky jsou okrajové podmínky zobrazeny na obrázku 3.7. Horní okrajová podmínka může například představovat stěnu, pohybující se konstantní rychlostí. Zároveň lze tuto konfiguraci považovat za první aproximaci kaňonu ulice. Reynoldsovo číslo se pro tento případ definuje, jako

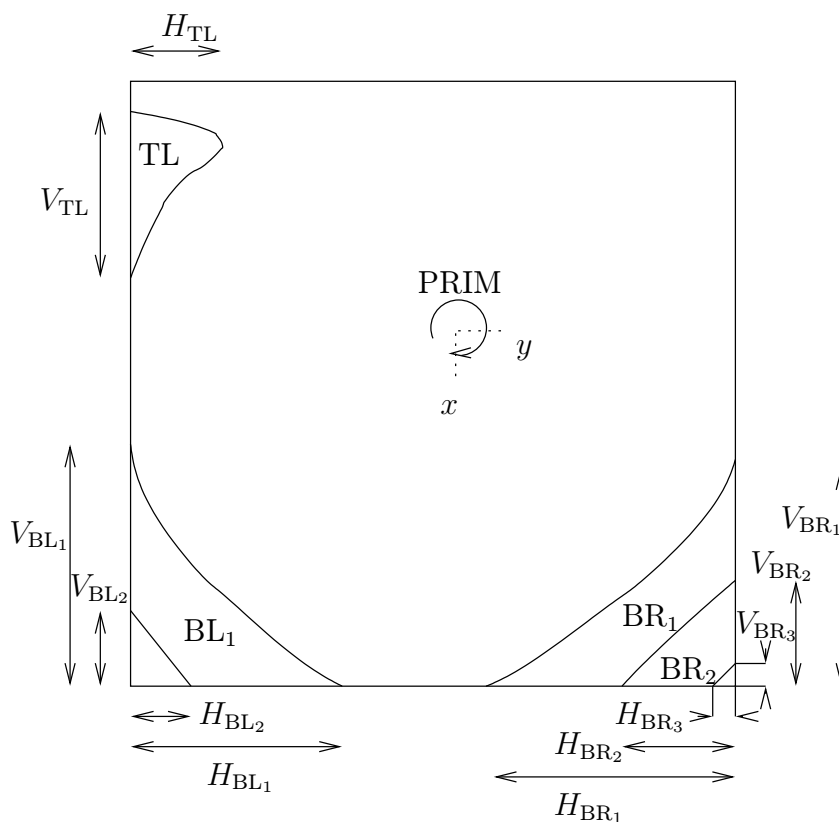
$$\text{Re} = \frac{UH}{\nu}, \quad (3.18)$$

kde U je rychlost na horní hranici a H rozměr dutiny.



Obrázek 3.7: Schéma proudění ve čtvercové dutině (použity bezrozměrné jednotky)

Tento případ nelze řešit analyticky, ale byl mnohokrát řešen numericky a jsou k dispozici data vhodná pro srovnání. Nejčastěji se pro tento účel používá práce (GHIA et al., 1982), ve které jsou k dispozici podrobná data pro Reynoldsova čísla 100 až 10000. Novější práce (ERTURK et al., 2005) přinesla data počítaná na velmi husté síti 601×601 pro Reynoldsova čísla 1000 až 20000. Obě práce používaly k řešení pohybové rovnice ve formulaci pomocí proudové funkce a vorticity.



Obrázek 3.8: Značení rozměrů vírů

Při nízkých Reynoldsových číslech vzniká v dutině jeden velký vír, označovaný dále jako PRIM (značení vírů viz obr. 3.8). Pro $Re = 100$ již jsou v dolních rozích vyvinuty sekundární víry BL_1 a BR_1 , které se s nárůstem Reynoldsova čísla zvětšují. Pro $Re = 1000$ vzniká další vír v pravém dolním rohu a pro $Re = 3200$ jsou již terciární víry v obou dolních rozích a další vír je vyvinut v oblasti těsně pod levým horním rohem. Pro $Re = 10000$ je v pravém dolní rohu malý vír dokonce čtvrtého řádu.

3.2.2 Výsledky simulace

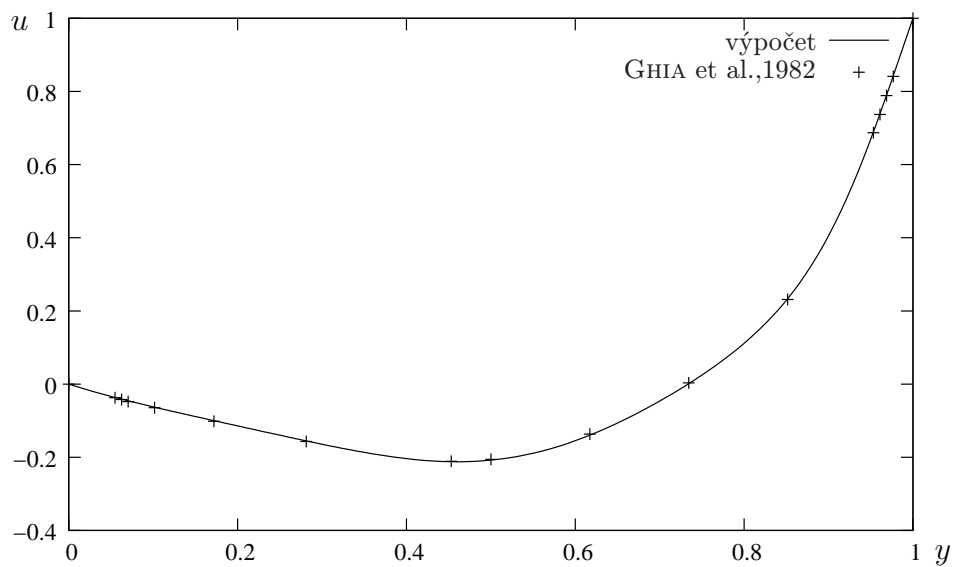
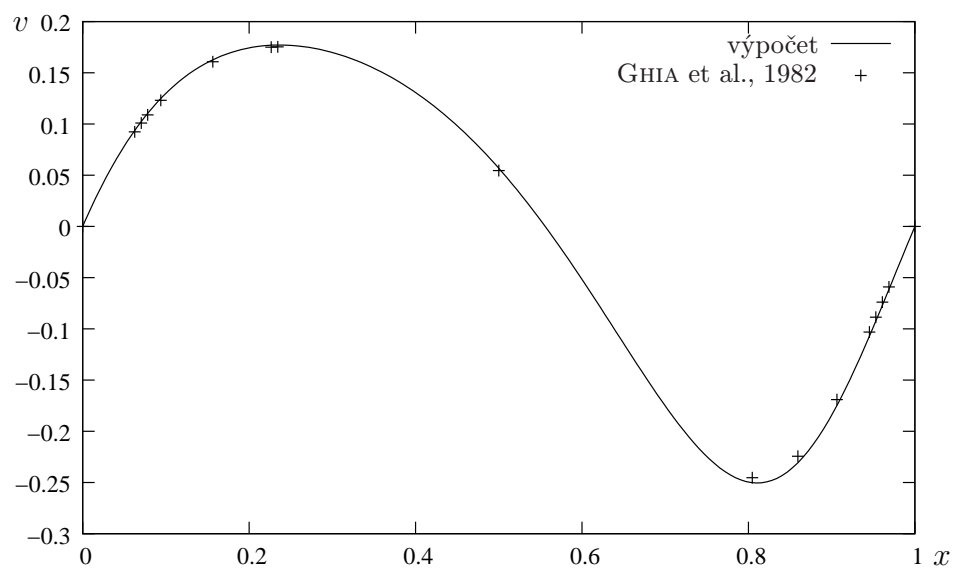
Pro validaci modelu byly vybrány případy $Re = 100$, $Re = 1000$ a $Re = 5000$. Jako hlavní charakteristiky vhodné pro porovnání byly použity profily složek rychlosti na osách dutiny. Profil složky u se zjišťuje na vertikální ose a profil v na horizontální ose. Tyto profily jsou pro některé body tabelovány v obou referenčních pracích. Dále byly porovnány rozměry vírů a poloha jejich os.

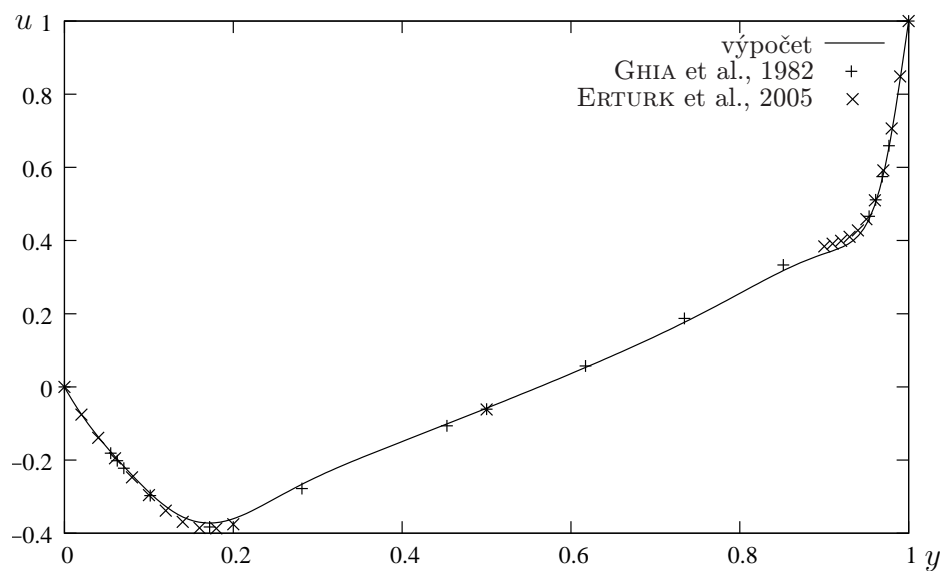
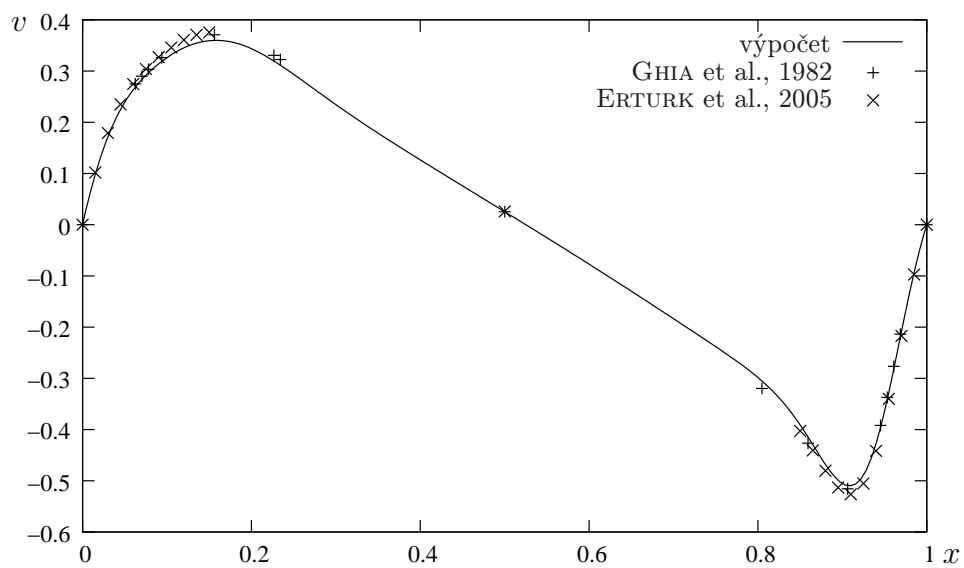
Na obrázcích A.1–A.3 v příloze jsou zobrazena pole proudění pro $Re =$

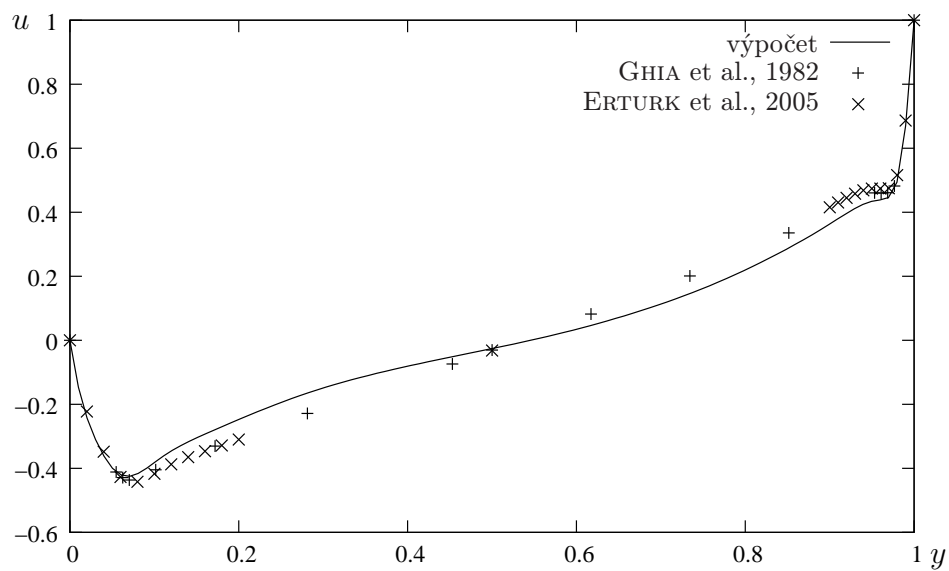
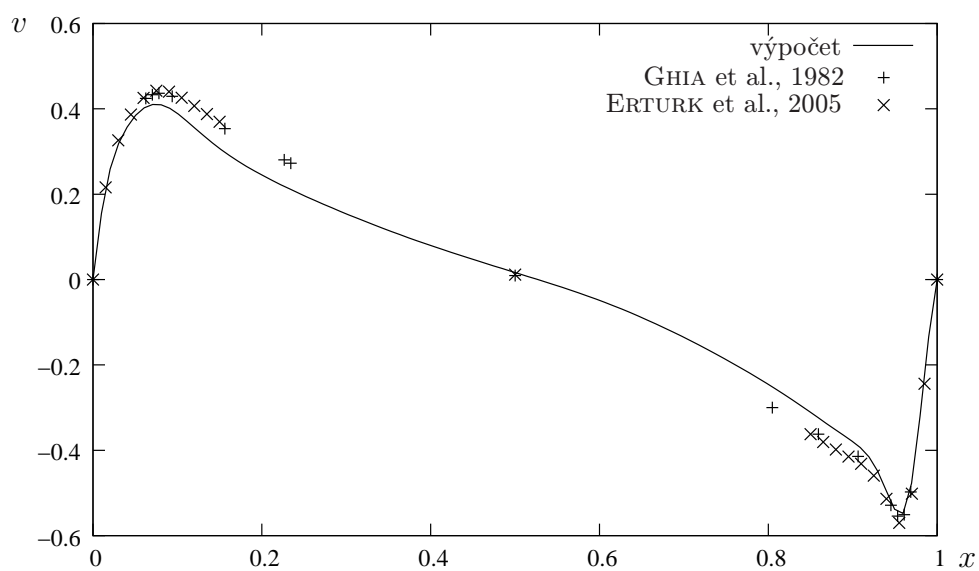
100, 1000 a 5000. První dva případy jsou počítané na pravidelné síti 160×160 . Pro Reynoldsovo číslo 5000 byla použita pravidelná síť 260×260 , která přibližně odpovídá síti použité v (GHIA et al., 1982).

V grafech 3.9–3.13 jsou výsledné profily rychlosti na osách dutiny, porovnané s dostupnými tabelovanými údaji. Profily pro $Re = 100$ a $Re = 1000$ odpovídají referenčním údajům velmi dobře. U případu $Re = 5000$ je patrná odchylka v lineární části uprostřed dutiny, která odpovídá oblasti s přibližně konstantní vorticitou. Zřejmě byla hustota sítě, která byla zvolena obdobně jako v práci (GHIA et al., 1982), nedostatečná. V referenční práci byla ovšem byla použita metoda vhodnější pro výpočet stacionárního proudění, umožňující výrazně rychlejší konvergenci. Pro tento jednoduchý případ proto nedosahuje použitá metoda tak dobrých výsledků, jako multigríd metoda, popsaná v (GHIA et al., 1982), využívající formulaci pomocí vorticity a proudové funkce.

V tabulce 3.2.2 jsou shrnuty parametry vírů pro $Re = 100$ a 1000 a porovnány s údaji podle (GHIA et al., 1982). Všechny údaje si dobře odpovídají, s ohledem na odhad chyby jako krok sítě $\Delta x = 1/160 = 6,25 \cdot 10^{-3}$. V tabulce 3.1 jsou pak parametry vírů pro $Re = 5000$. Zde si stále dobře odpovídají parametry vírů v pravém dolním rohu a u levého horního rohu. Je ovšem patrná odchylka v celkové velikosti velikosti víru BL_2 . Přesto jsou však v poli proudění vyvinuty všechny důležité útvary.

Obrázek 3.9: Profil rychlosti u na ose $x = 0,5$ pro $Re = 100$ Obrázek 3.10: Profil rychlosti v na ose $y = 0,5$ pro $Re = 100$

Obrázek 3.11: Profil rychlosti u na ose $x = 0,5$ pro $Re = 1000$ Obrázek 3.12: Profil rychlosti v na ose $y = 0,5$ pro $Re = 1000$

Obrázek 3.13: Profil rychlosti u na ose $x = 0,5$ pro $Re = 5000$ Obrázek 3.14: Profil rychlosti v na ose $y = 0,5$ pro $Re = 5000$

	Re	výpočet 100	GHIA et al. 100	výpočet 1000	GHIA et al. 1000
PRIM	x	0,616	0,6172	0,532	0,5313
	y	0,739	0,7344	0,566	0,5625
BL ₁	x	0,034	0,0313	0,082	0,0859
	y	0,034	0,0391	0,076	0,0781
	H	0,084	0,0781	0,225	0,2188
	V	0,084	0,0781	0,169	0,1680
BR ₁	x	0,942	0,9453	0,865	0,8594
	y	0,061	0,0625	0,112	0,1094
	H	0,136	0,1328	0,301	0,3034
	V	0,154	0,1484	0,365	0,3536
BR ₂	x			0,992	0,9922
	y			0,007	0,0078
	H			0,022	0,0078
	V			0,023	0,0078

Tabulka 3.1: Parametry vířů pro $Re = 100$ a $Re = 1000$

	Re	výpočet 5000	GHIA et al. 5000		výpočet 5000	GHIA et al. 5000	
PRIM	x	0,532	0,5117	BR ₁	x	0,809	0,8086
	y	0,549	0,5352		y	0,072	0,0742
					H	0,356	0,3565
					V	0,426	0,4180
BL ₁	x	0,062	0,0703	BR ₂	x	0,979	0,9805
	y	0,156	0,1367		y	0,018	0,0195
	H	0,330	0,3184		H	0,054	0,0528
	V	0,289	0,2643		V	0,040	0,0417
BL ₂	x	0,018	0,0117	TL	x	0,061	0,0625
	y	0,021	0,0078		y	0,910	0,9102
	H	0,050	0,0156		H	0,113	0,1211
	V	0,064	0,0163		V	0,258	0,2693

Tabulka 3.2: Parametry vířů pro $Re = 5000$

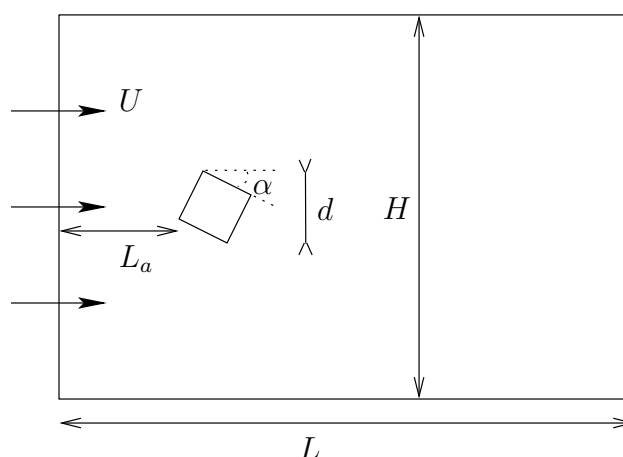
3.3 Proudění kolem nekonečného válce čtvercového průřezu

3.3.1 Popis problému

Jako poslední případ bylo vybráno proudění kolem válce čtvercového průřezu. Tento případ umožňuje otestovat také nestacionární proudění. Geometrie problému je znázorněna na obrázku 3.15. Reynoldsovo číslo je pro tento případ definováno (SOHANKAR et al., 1997) jako

$$\text{Re} = \frac{Ud}{\nu}, \quad (3.19)$$

kde d je délka průmětu čtverce na osu y a U je rychlost nabíhajícího proudu.



Obrázek 3.15: Schéma uspořádání při obtékání čtvercového válce

Čtvercový průřez válce znamená na jedné straně snazší popis vnořené hranice, na druhé straně ovšem zvýšené obtíže při modelování proudění kolem ostrých hran. Tělesa s podobným tvarem se nazývají „vírová tělesa“ (bluff bodies), tj. tělesa která nejsou uzpůsobena pro hladké obtékání a u nichž nastává odtržení (separace) proudu na velké části povrchu. Charakter proudění v tomto případě výrazně závisí na Reynoldsově čísle. Jen pro velmi malá Reynoldsova čísla ($\text{Re} \ll 1$) proudnice volně obepínají válec. Při vyšších Reynoldsových číslech se objevuje odtržení proudnic a vznik recirkulace na zadní straně válce i obou bočních stěn, přičemž délka hlavní recirkulační zóny L_r roste lineárně s Re . Přibližně od $\text{Re} = 50$ – 55 (pro $\alpha = 0$) dochází k bifurkaci (SOHANKAR et al., 1995). Recirkulační zóna se stává nestabilní a začínají

se z ní oddělovat jednotlivé víry, střídavě s opačným smyslem rotace. Tyto víry vytvářejí charakteristickou tzv. Kármánovu řadu vírů (Kármán vortex street). Do $Re \approx 250$ lze proudění považovat za dvourozměrné. Určité prvky narušující 2D proudění se ovšem začínají objevovat již pro Re mezi 150 a 175 (SAHA et al., 2003). Konečně pro $Re > 300$ se proudění stává turbulentním.

Ideálně by měl být válec umístěn v nekonečném poli konstantního proudění. To všem není možné, ani v případě experimentu, ani počítačové simulace. Důležitým parametrem je proto také tzv. poměr blokace, definovaný jako

$$\beta = \frac{d}{H}, \quad (3.20)$$

kde H je šířka kanálu použitého k experimentu, nebo příčný rozměr početní oblasti. Tento poměr významně ovlivňuje výsledky (SOHANKAR et al., 1995), avšak jeho používaná hodnota není nijak sjednocena.

Rychlost oddělování vírů popisuje Strouhalovo číslo (STROUHAL, 1878), definované

$$St = \frac{fd}{U}, \quad (3.21)$$

kde f je frekvence odtrhávání vírů.

Silové působení tekutiny na válec lze popsat dvěma bezrozměrnými parametry – koeficientem odporu a koeficientem vztlaku. Koeficient odporu je definován jako

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 d}, \quad (3.22)$$

kde F_D je síla působící na válec ve směru $-x$, skládající se z části dané rozložením tlaku na stěnách válce a z části dané třením tekutiny. Koeficient vztlaku se definuje obdobně ve tvaru

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho U^2 d}, \quad (3.23)$$

kde F_L je síla působící na válec ve směru osy y .

3.3.2 Parametry výpočtu

K výpočtu byla zvolena početní oblast s rozměry

$$\begin{aligned} H &= 17, \\ L &= 32, \\ L_a &= 6. \end{aligned}$$

Rozměr d byl zvolen jednotkový. Poměr blokace byl proto

$$\beta = 1/17 \doteq 5,9\%.$$

Na hranicích oblasti byly použity tyto okrajové podmínky:

- i) Dirichletova podmínka na vstupní hranici: $u = U, v = 0$,
- ii) free-slip podmínka na horní a dolní hranici: $\frac{\partial u}{\partial y} = 0, v = 0$,
- iii) Neumannova podmínka na výstupní hranici: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$.

K výpočtu byla použita nerovnoměrná síť 352×258 kontrolních objemů. Nejmenší krok sítě byl v okolí vnořené hranice a měl velikost $\Delta x_{\min} = \Delta y_{\min} = 1/20$. Výběru sítě předcházelo zkoušení výsledků na různých sítích tak, aby se výsledek již neměnil.

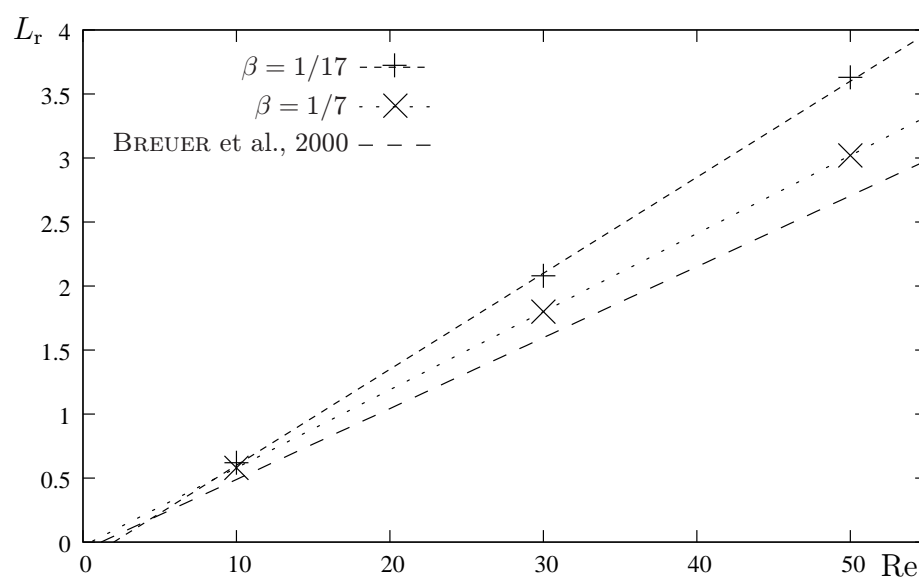
3.3.3 Výsledky simulace

Válec ve standardní poloze

Nejdříve bylo počítáno proudění kolem válce ve standardní poloze $\alpha = 0^\circ$ (viz obr. 3.15) při Reynoldsových číslech od 10 do 250. Pro $Re = 10, 30$ a 50 bylo proudění stacionární, ve shodě s teoretickými předpoklady. Pro $Re = 60$ došlo nejdříve ke vzniku recirkulační zóny, jako u nižších Re . Po určité době se ovšem projevila nestabilita a došlo ke vzniku vírové cesty. Pro vyšší Reynoldsova čísla už k vytvoření stacionárního stavu nedošlo a po dosažení minimální hodnoty C_D došlo ihned k oddělování vírů. Tento průběh lze vidět na grafech 3.17 a 3.18, kde je zobrazena závislost koeficientu odporu a vztlaku na čase pro $Re = 100$.

V případě stacionárního proudění byla zjišťována závislost délky recirkulační zóny na Re . Potvrdilo se, že tato závislost je lineární. Hodnota koeficientů této lineární závislosti nesouhlasila s údaji z práce (BREUER et al., 2000), ve které byl ovšem použit koeficient blokace $1/8$ a proudění bylo počítáno v kanále s pevnými stěnami a parabolickým rychlostním profilem. Srovnávací data používající rovnoměrný rychlostní profil bohužel nejsou k dispozici. Pro kontrolu byl proveden ještě výpočet s koeficientem blokace $1/7$. Výsledky obou výpočtů i referenční data jsou zobrazeny v grafu 3.16. Je vidět, že se zvětšením blokace se snížil koeficient úměrnosti, ale nedosáhl hodnoty z (BREUER et al., 2000). Potvrdilo se ale, že délka recirkulační zóny významně závisí na detailních podmínkách výpočtu. Výsledné koeficienty závislosti $L_r = ARe + B$, získané lineární regresí, jsou shrnuty v tabulce 3.3. V případě Re je proudění zobrazeno na obr. A.4.

	A	B
$\beta = 1/17$	0,075	-0,15
$\beta = 1/7$	0,061	-0,03
BREUER et al. $\beta = 1/8$	0,0554	-0,65

Tabulka 3.3: Koeficienty lineární regrese pro závislost $L_r = A Re + B$ Obrázek 3.16: Závislost délky recirkulační zóny na Re pro $\alpha = 0$

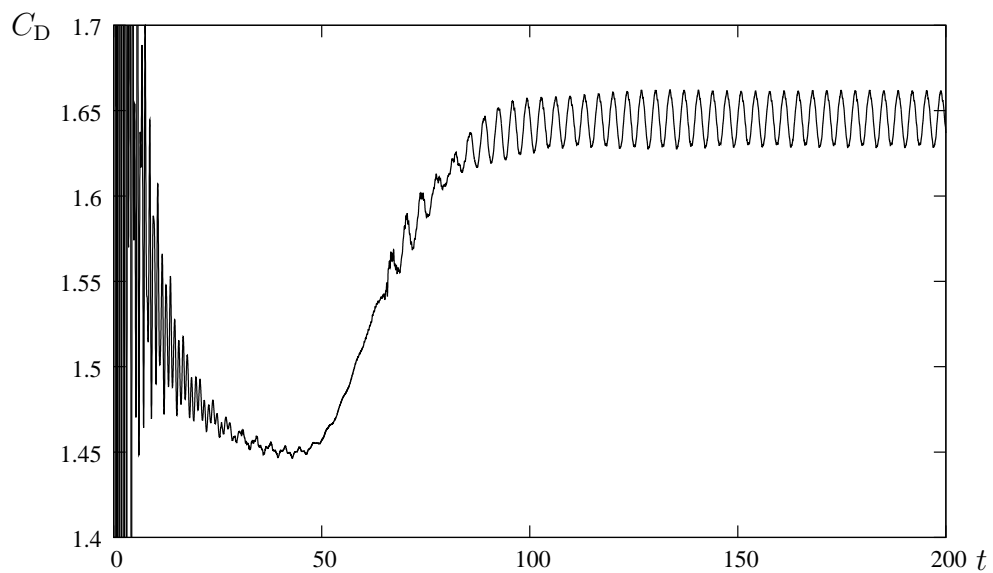
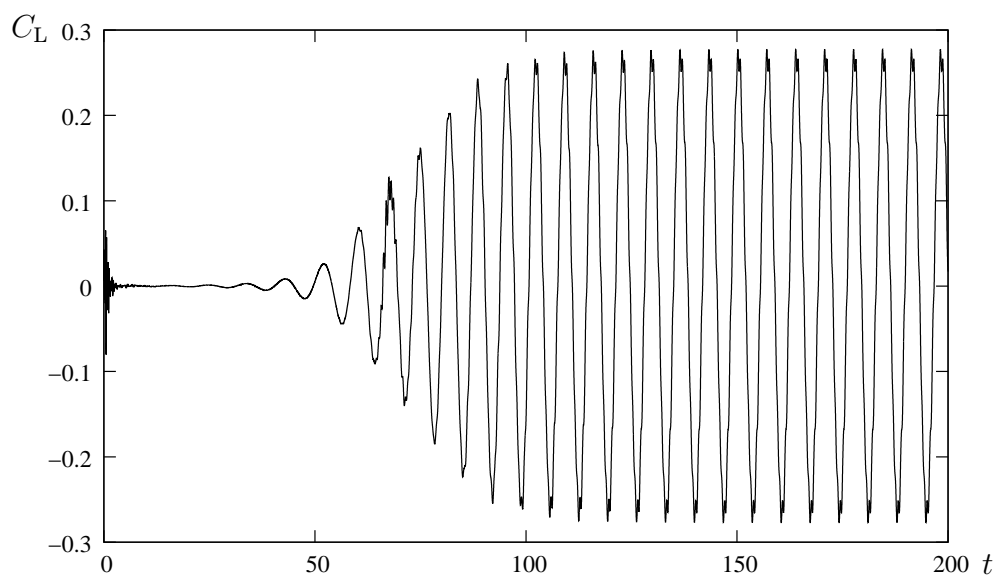
Pro nestacionární proudění bylo z průběhu koeficientu vztlaku zjišťováno Strouhalovo číslo a jeho průběh byl srovnán s dostupnými experimentálními i numerickými výsledky. Zjištěná závislost je zobrazena v grafu 3.19. Výsledek odpovídá ostatním údajům, které mají poměrně velký rozptyl.

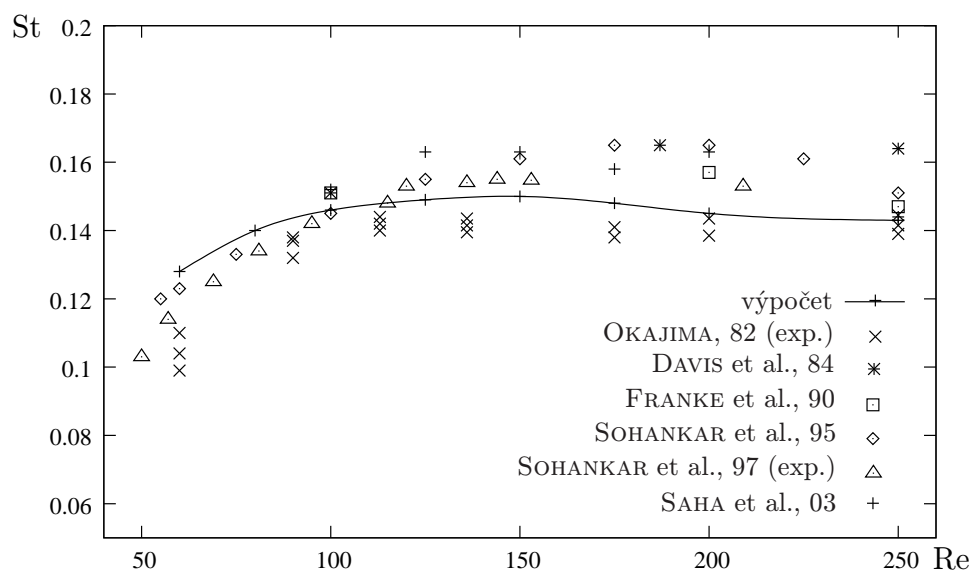
Dále byla zjišťována střední hodnota koeficientu odporu, a to vždy v časovém úseku po ustálení proudění resp. ustanovení periodického stavu. Výsledná závislost je spolu s dostupnými referenčními daty znázorněna v grafu 3.20. Z grafu je vidět jistá odchylka k vyšším hodnotám, zvláště při vyšších Reynoldsových číslech. Tuto odchylku se nepodařilo vysvětlit a bude proto pravděpodobně předmětem dalšího studia. Obrázek okamžitého stavu proudění při $Re = 200$ je na obr. A.5 v příloze.

Válec pootočený o 45°

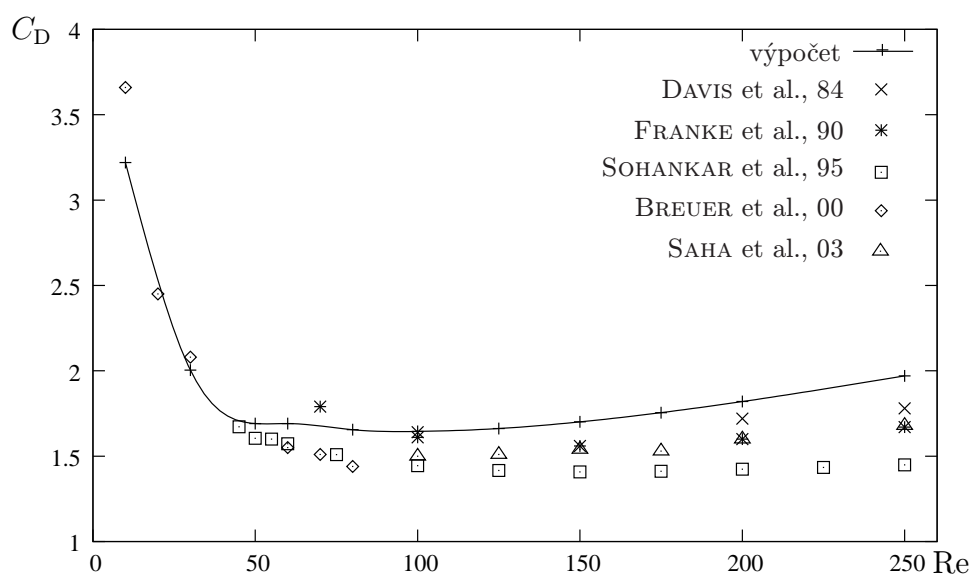
Jako druhý případ bylo počítáno proudění kolem válce pro $\alpha = 45^\circ$. Hlavním důvodem bylo ověření funkčnosti bilineární interpolace u vnořené hranice. Pro tento případ nebylo k dispozici tolik dat pro srovnání. Proto bylo provedeno pouze několik výpočtů. Do hodnoty Reynoldsova čísla přibližně 40 bylo proudění stacionární. Příklad je možno vidět na obr. A.6 v příloze, kde je zobrazeno okolí válce pro $Re = 30$.

Pro Reynoldsovo číslo 200 je proudění na obrázku A.7. Strouhlovo číslo bylo v tomto případě $St = 0,210$, což odpovídá hodnotě 0,204 uváděné v (SOHANKAR et al., 1997). Koeficienty odporu a vztlaku počítány nebyly.

Obrázek 3.17: Závislost koeficientu odporu na čase při $Re = 100$ a $\alpha = 0$ Obrázek 3.18: Závislost koeficientu vztlaku na čase při $Re = 100$ a $\alpha = 0$



Obrázek 3.19: Závislost Strouhalova čísla na Reynoldsově čísle pro $\alpha = 0$. Zobrazená křivka je výsledek interpolace pomocí kubické spline a slouží jen pro přehlednost.



Obrázek 3.20: Závislost střední hodnoty koeficientu odporu na Reynoldsově čísle pro $\alpha = 0$. Zobrazená křivka je výsledek interpolace pomocí kubické spline a slouží jen pro přehlednost.

Kapitola 4

Závěr

Tato práce položila základ pro vznikající model proudění v mezní vrstvě atmosféry ve složité prostorové geometrii. Nejprve byly shrnuty rovnice popisující laminární nestlačitelné proudění tekutin. Poté byly popsány některé metody používané k jejich řešení. Zvláštní pozornost byla věnována metodě konečných objemů, godunovovským metodám a metodě vnořené hranice. Poté byla popsána struktura programu a implementace použitých metod.

Funkčnost modelu byla testována na několika jednoduchých, dobře zdokumentovaných případech laminárního proudění. První případ bylo proudění nad hladkou deskou, které lze srovnat s analytickým Blasiovým řešením. Mezní vrstva, vznikající v bezprostředním okolí desky, odpovídala teoretickým předpokladům.

Dále bylo počítáno proudění v dutině čtvercového průřezu při Reynoldsových číslech 100, 1000 a 5000. Byly porovnávány profily složek rychlostí na osách dutiny a poloha a rozměry vírů. Výsledky pro $Re = 100$ a 1000 velmi dobře odpovídaly referenčním výsledkům. Pro $Re = 5000$ již byla patrná odchylka od referenčních dat, při použití stejné výpočetní sítě, jako v srovnávané práci.

Posledním testovacím problémem bylo proudění kolem válce s čtvercovým průřezem. Pro velmi nízká Reynoldsova čísla byla zjišťována závislost délky recirkulační zóny a koeficientu odporu na Reynoldsově čísla. Pro nestacionární proudění při vyšších Re byla studována závislost koeficientu odporu a Strouhlova čísla. Zjištěné závislosti odpovídaly dostupným experimentálním i numerickým výsledkům. Pouze pro $Re = 200$ a 250 se vyskytovala větší kladná odchylka v hodnotě koeficientu odporu, kterou se nepodařilo vysvětlit.

Vývoj modelu není v žádném případě u konce. I v rámci laminárního proudění je mnoho možností, jak program vylepšit. V úvahu připadá napří-

klad použití schématu vyššího řádu přesnosti pro výpočet advekčních členů. Celkový řád přesnosti modelu nemůže být vyššího řádu přesnosti než druhého, v důsledku použité metody postupných kroků. Přesto může přinést použití schématu vyššího řádu v případě advekčních členů významné zpřesnění, zvláště v případě vysokých Reynoldsových čísel. Je možné použít například schéma CWENO (central weighted essentially nonoscillatory) popsané v článku (KURGANOV, LEVY, 2000), nebo schéma podle (KURGANOV et al., 2001). Obě schémata jsou třetího řádu přesnosti a rozšiřují v současnosti použité schéma s bilineární minmod rekonstrukcí. Nejprve bude ovšem třeba schéma převést do nerovnoměrné sítě.

Další možností je provést přechod od posunuté sítě do sítě se společným umístěním proměnných. To by umožnilo snadnější implementaci advekčních členů, ovšem na druhé straně by bylo třeba složitěji řešit spojení pohybových rovnic a rovnice kontinuity.

Použité rovnice je možné doplnit o další členy. Velmi důležité jsou vztlakové členy, které způsobují silové působení na tekutinu v důsledku nerovnoměrného rozdělení teploty. Nejjednodušší způsob jejich řešení je tzv. Boussinesqova aproximace (FERZIGER, PERIĆ, 1997).

Model, který má být použitelný pro výpočet proudění v mezní vrstvě atmosféry, musí být schopen popsat turbulentní proudění. To je třeba řešit pomocí modelů turbulence (VERSTEEG, MALALASEKERA, 1995; FERZIGER, PERIĆ, 1997). V úvahu připadají dva základní typy modelů: simulace velkých vírů (large eddy simulation, LES) a reynoldsovsky středované Navierovy-Stokesovy rovnice (Reynolds averaged Navier-Stokes equations, RANS). Implementace těchto modelů ovšem není jednoduchá a bude zřejmě prováděna v rámci dalšího studia. Navíc turbulentní proudění znamená nutnost použití velmi hustých sítí, v blízkosti pevných stěn. Z důvodu ušetření výpočetních prostředků bude tedy možná třeba vyvinout lokální zahušťování sítě (local grid refinement).

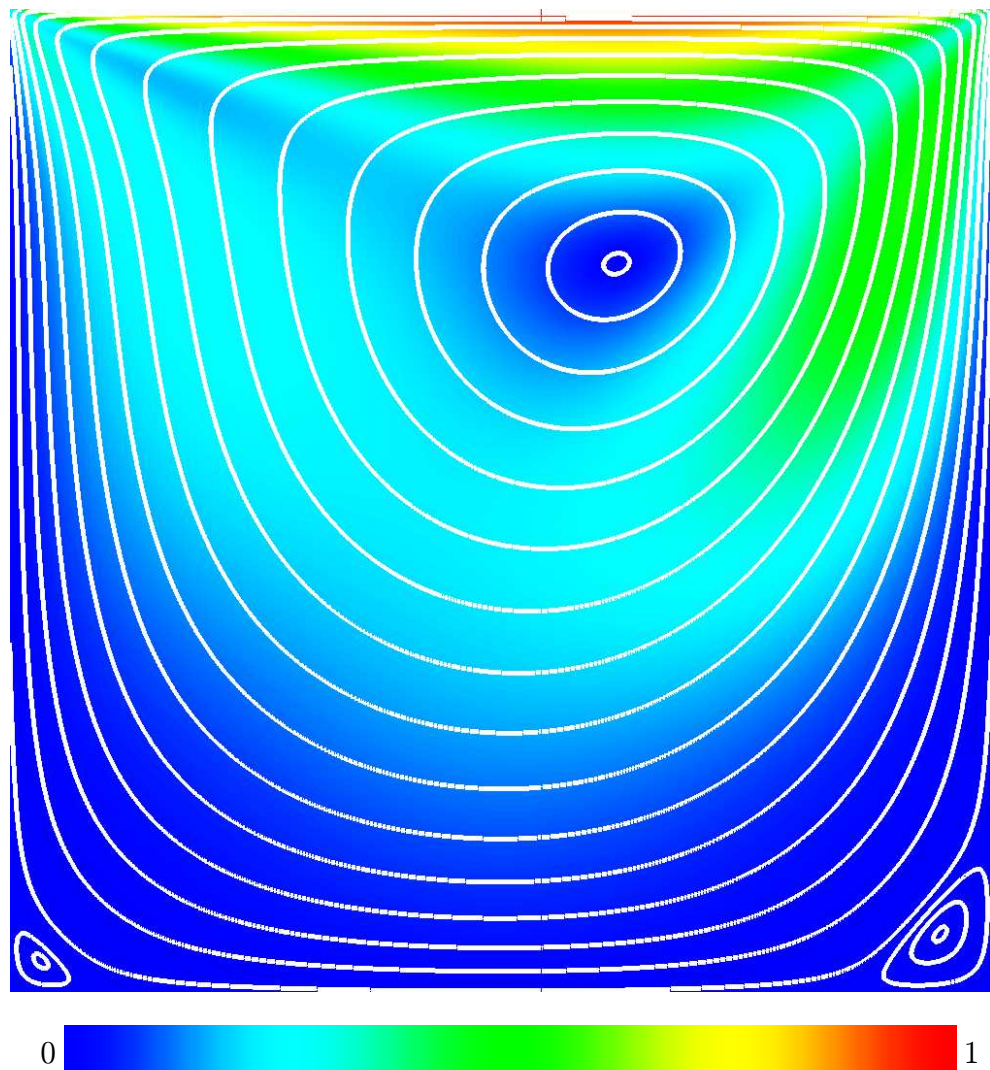
Současná verze není optimalizována na maximální rychlost výpočtu. Například Gassova-Seidelova metoda, která je nyní použita pro výpočet Poissonovy rovnice není příliš efektivní. Proto bude v dalších verzích nahrazena jinou metodou. Pravděpodobně půjde o některou krylovovskou metodu nebo o rychlý poissonovský řešič (fast Poisson solver), využívající separabilitu Poissonovy rovnice na ortogonální síti.

Aktuální verzi programu je třeba zvlášť připravit pro počítání nového problému. Proto bude pravděpodobně vytvořeno uživatelské rozhraní, umožňující snadnější přípravu vstupních dat a okrajových podmínek.

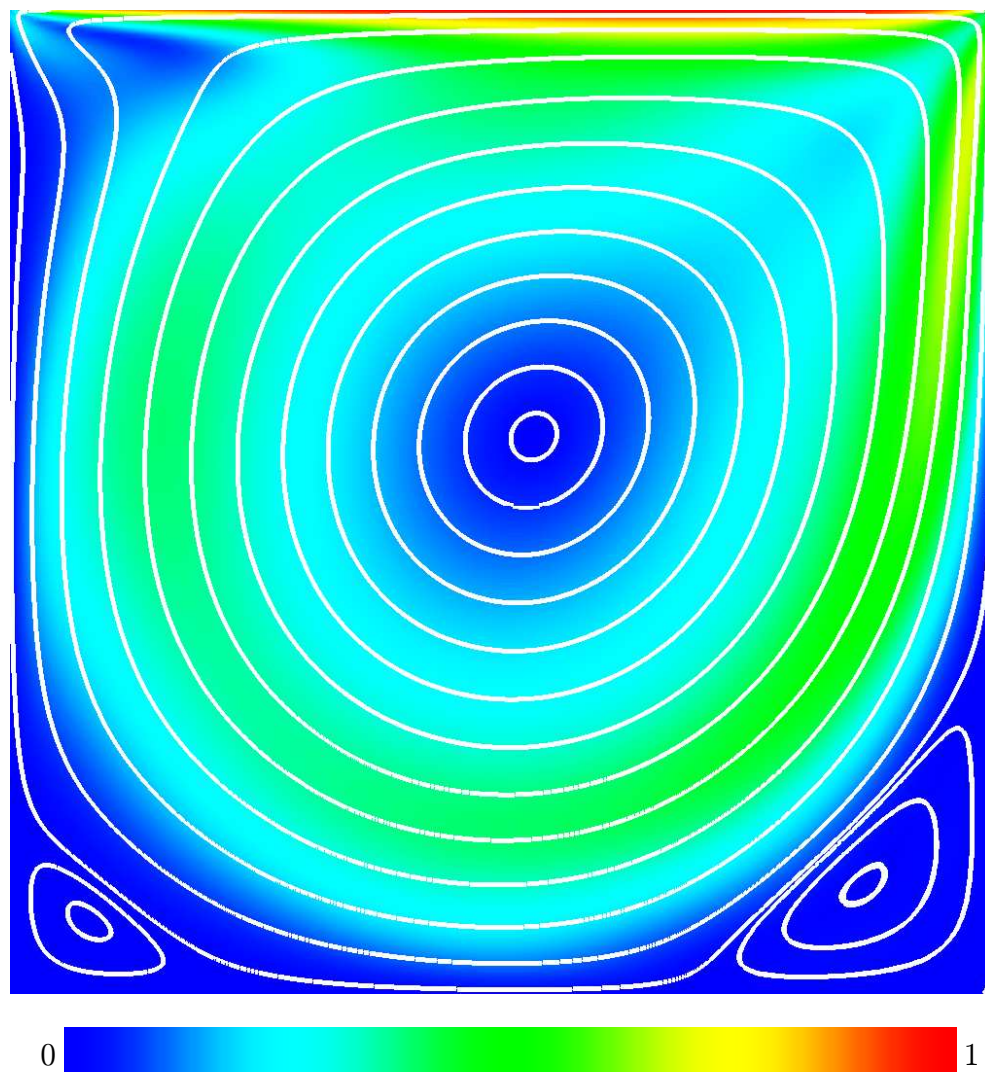
Příloha A

Obrázky proudění

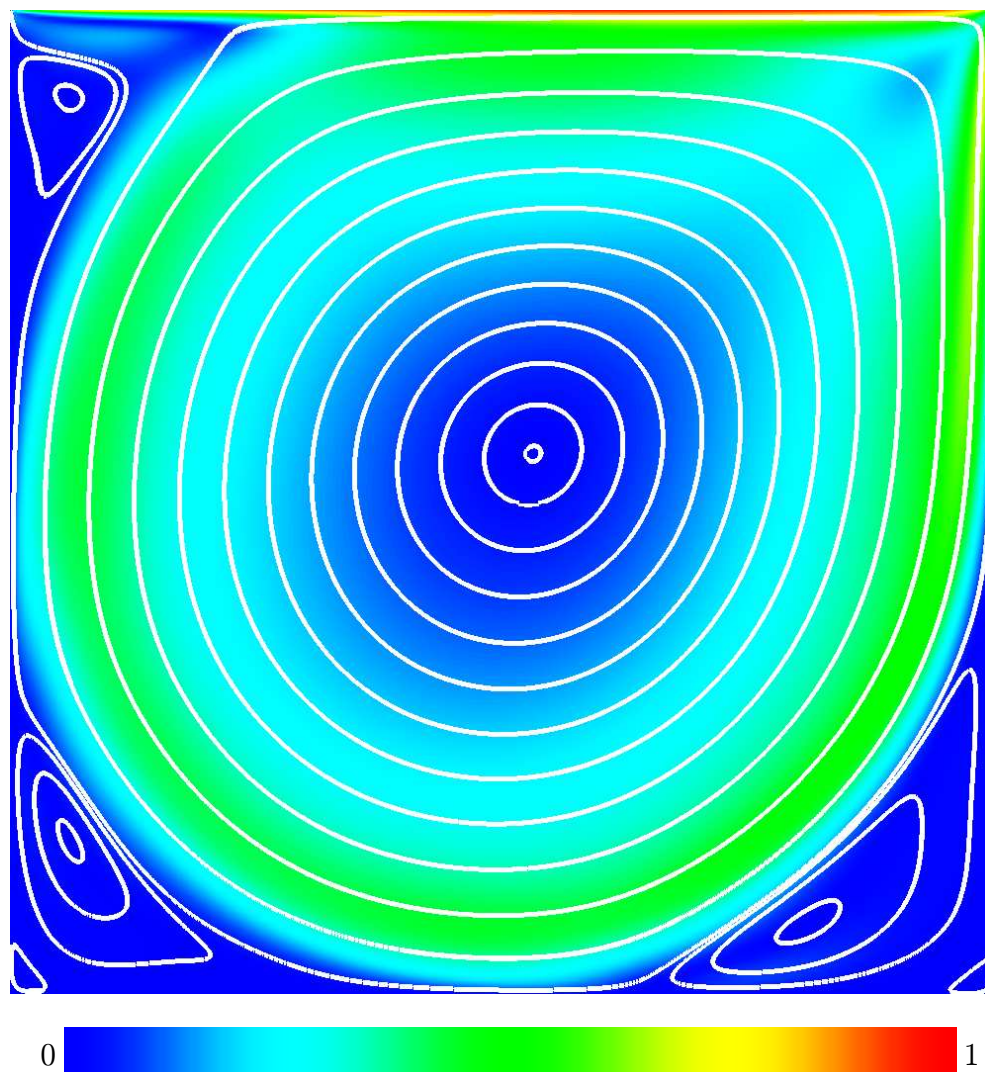
Na následujících stránkách jsou obrázky několika případů proudění, vytvořené pomocí programu Kitware Paraview. V případě proudění v čtvercové dutině a proudění kolem válce při $Re = 30$ jde o konečné stacionární řešení. V případě obtékání válce při $Re = 200$ jde o okamžité hodnoty v určitém čase.



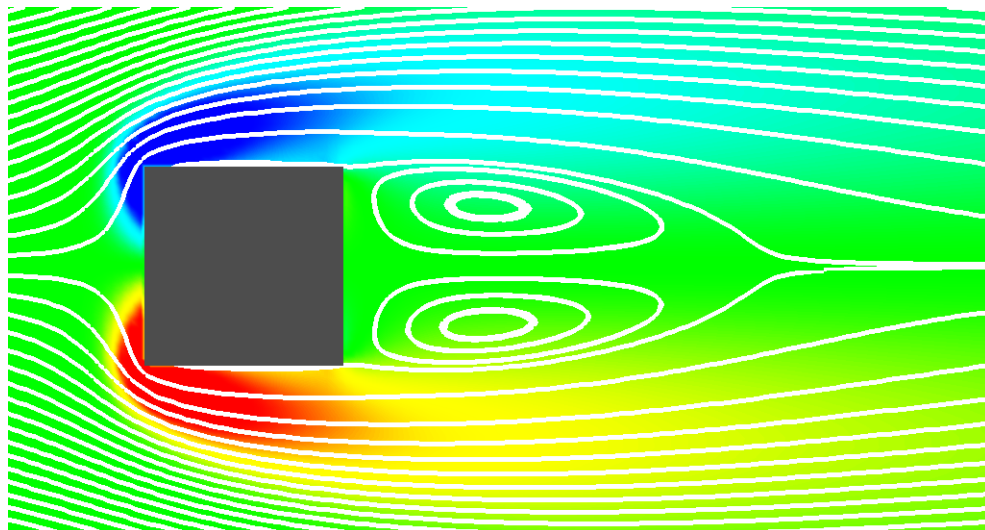
Obrázek A.1: Pole proudnic pro $Re = 100$. Barva označuje velikost rychlosti. Vyznačené proudnice slouží pouze pro orientaci a nejsou v žádném vztahu k proudové funkci.



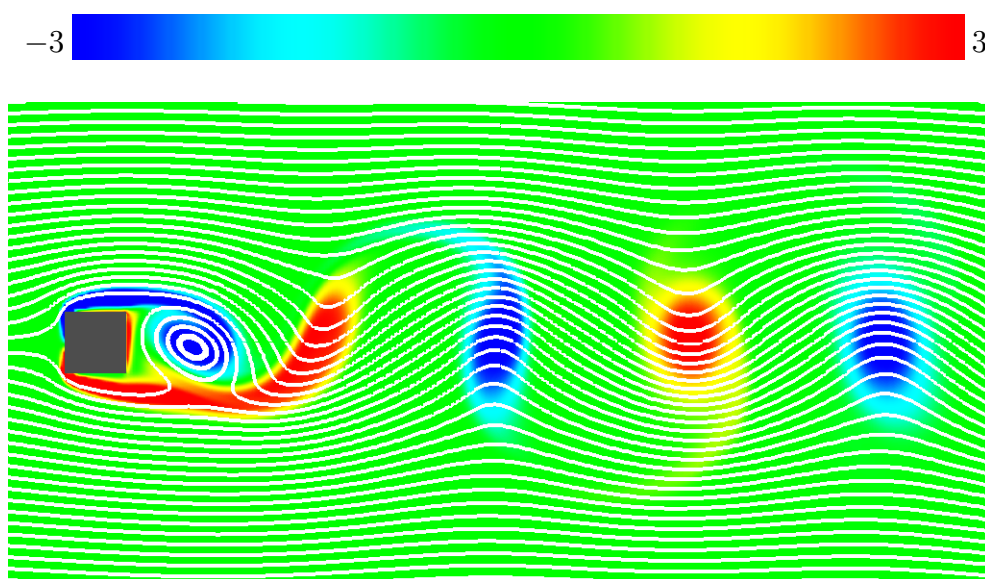
Obrázek A.2: Pole proudnic pro $Re = 1000$. Barva označuje velikost rychlosti. Vyznačené proudnice slouží pouze pro orientaci a nejsou v žádném vztahu k proudové funkci.



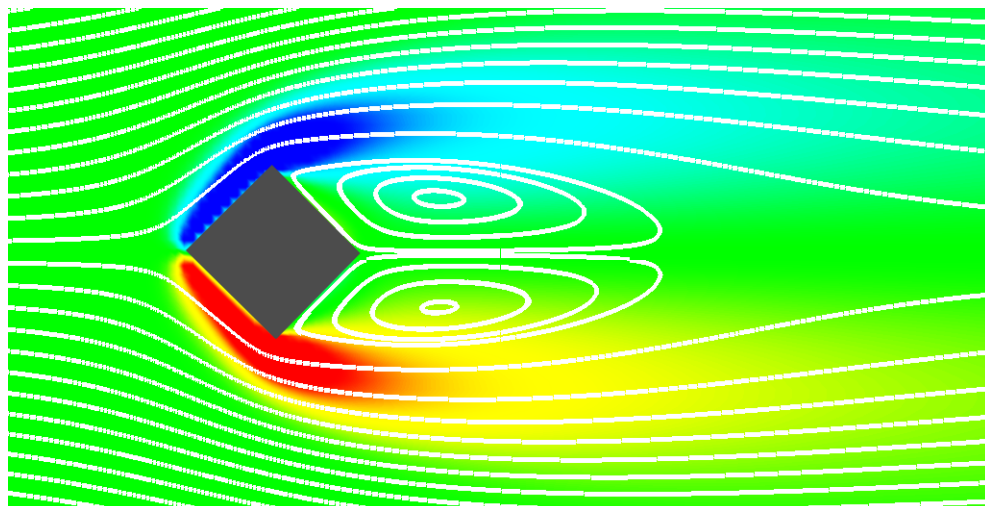
Obrázek A.3: Pole proudnic pro $Re = 5000$. Barva označuje velikost rychlosti. Vyznačené proudnice slouží pouze pro orientaci a nejsou v žádném vztahu k proudové funkci.



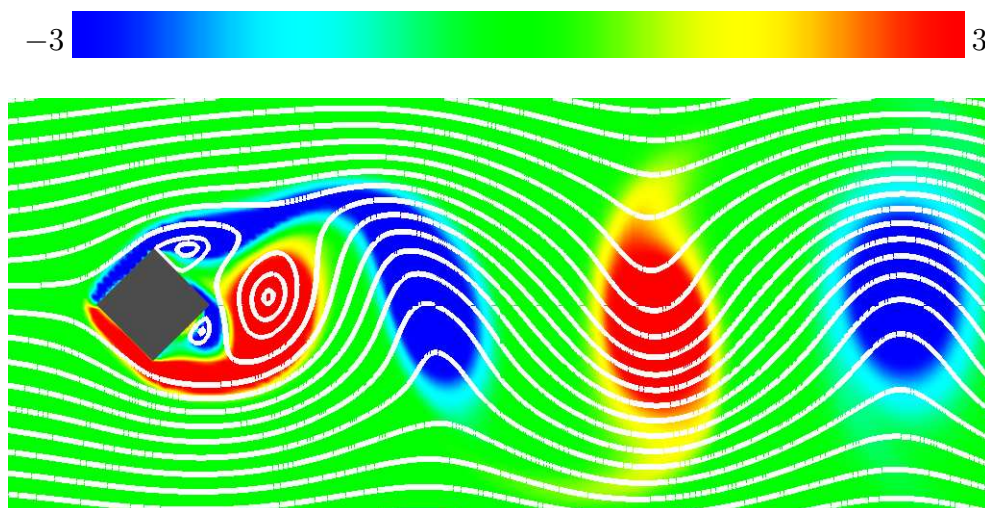
Obrázek A.4: Proudění kolem čtvercového válce pro $Re = 30$ a $\alpha = 0^\circ$. Bílé křivky jsou proudnice a barva označuje vorticitu.



Obrázek A.5: Proudění kolem čtvercového válce pro $Re = 200$ a $\alpha = 0^\circ$. Bílé křivky jsou proudnice a barva označuje vorticitu.



Obrázek A.6: Proudění kolem čtvercového válce pro $Re = 30$ a $\alpha = 45^\circ$. Bílé křivky jsou proudnice a barva označuje vorticitu.



Obrázek A.7: Proudění kolem čtvercového válce pro $Re = 200$ a $\alpha = 45^\circ$. Bílé křivky jsou proudnice a barva označuje vorticitu.

Literatura

- BATCHELOR, G. K. 2000. *An introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- BELL, J. B., COLELLA, P., & GLAZ, H. M. 1989. A Second-Order Projection Method for the Incompressible Navier-Stokes Equations. *J. Comput. Phys.*, **85**, 257–283.
- BELL, T. 2003. *The Numerical Wind Tunnel: A Three-Dimensional Computational Fluid Dynamics Tool*. Diplomová práce (M.A.Sc.), Dalhousie University, Faculty of Mechanical Engineering. Dostupný z WWW: http://cfdnet.com/nwt/NWT_Thesis_Theo_Bell.pdf.
- BREUER, M., BERNSDORF, J., ZEISER, T., & F., DURST. 2000. Accurate computations of the laminar flow past a square cylinder based on two different methods: lattice-Boltzmann and finite-volume. *Int. J. Heat Fluid Flow*, **21**, 186–196.
- BROWN, D. L., CORTEZ, R., & MINION, M. L. 2001. Accurate Projection Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations. *J. Comput. Phys.*, **168**, 464–499.
- CHORIN, A. J. 1968. Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations. *Math. Comp.*, **22**, 745–762.
- COLELLA, P., & WOODWARD, P. R. 1984. The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical Simulations. *J. Comput. Phys.*, **54**, 174–201.
- DAVIS, R. W., MOORE, E. F., & PURTELL, L. P. 1984. Numerical calculation of laminar vortex shedding past cylinder. *Phys. Fluids*, **27** (1), 46–59.
- DOBEŠ, J. 2003. *Laminární mezní vrstva na desce*. Nepublikováno.

- ERTURK, E., CORKE, T. C., & GÖKÇÖL, C. 2005. Numerical Solutions of 2-D Steady Incompressible Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, **48**, 747–774.
- FADLUN, E. A., VERZICCO, R., ORLANDI, P., & MOHD-YUSOF, J. 2000. Combined Immersed-Boundary Finite-Difference Methods for Three-Dimensional Complex Flow Simulations. *J. Comput. Phys.*, **161**, 35–60.
- FERZIGER, J. H., & PERIĆ, M. 1997. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Berlin: Springer Verlag.
- FRANKE, R., RODI, W., & SCHÖNUNG, B. 1990. Numerical calculation of laminar vortex shedding past cylinder. *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.*, **35**, 237–257.
- GHIA, U., GHIA, K. N., & SHIN, C. T. 1982. High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method. *J. Comput. Phys.*, **48**, 387–411.
- GODUNOV, S. K. 1959. Raznostnyj metod čislenovo rasčeta razryvnych rešenij uravnenij gidrodinamiki. *Mat. Sb.*, **47**, 271–306.
- GODUNOV, S. K. 1999. Reminiscences about Difference Schemes. *J. Comput. Phys.*, **153**, 6–25.
- GOLDSTEIN, D., HANDLER, R., & SIROVICH, L. 1993. Modeling a no-slip flow boundary with an external force field. *J. Comput. Phys.*, **105**, 354–366.
- GRAUER, R., & SPANIER, F. 2003. A note on the use of central schemes for incompressible Navier-Stokes flows. *J. Comput. Phys.*, **192**, 727–731. Dostupný z WWW: http://www.cscamm.umd.edu/centpack/publications/files/Grauer_Spanier_CWENO_JCP03-centpack.pdf.
- HAGEN, R. H., HENRIKSEN, M. O., HJELMERVIK, J. M., & LIE, K.-A. Bude vydán. How to Solve Systems of Conservation Laws Numerically Using the Graphics Processor as a High-Performance Computational Engine. In: HASLE, G., LIE, K.-A., & QUAK, E. (eds), *Geometrical Modeling, Numerical Simulation and Optimization: Industrial Mathematics at SINTEF*. Springer Verlag. Dostupný z WWW: <http://heim.ifi.uio.no/~kalie/papers/conslaws-GPU.pdf>.

- HARLOW, F. H., & E., WELCH J. 1965. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with a free surface. *Phys. Fluids*, **8**, 2182–2189.
- HARTEN, A. 1983. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *J. Comput. Phys.*, **49**, 357–393.
- KIM, J., & MOIN, P. 1985. Application of a Fractional-Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations. *J. Comput. Phys.*, **59**, 308–323.
- KIM, J., KIM, D., & CHOI, H. 2001. An Immersed-Boundary Finite-Volume Method for Simulations of Flow in Complex Geometries. *J. Comput. Phys.*, **171**, 132–150.
- KURGANOV, A., & LEVY, D. 2000. A Third-Order Semidiscrete Central Scheme for Conservation Laws and Convection-Diffusion Equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, **22**, 1461–1488. Dostupný z WWW: http://www.cscamm.umd.edu/centpack/publications/files/Kur-Lev_3rd_semi_discrete.SINUM00-centpack.pdf.
- KURGANOV, A., & TADMOR, E. 2000. New High-Resolution Central Schemes for Nonlinear Conservation Laws and Convection-Diffusion Equations. *J. Comput. Phys.*, **160**, 241–282. Dostupný z WWW: http://www.cscamm.umd.edu/centpack/publications/files/KT_semi_discrete.JCP00-centpack.pdf.
- KURGANOV, A., NOELLE, S., & PETROVA, G. 2001. Semidiscrete Central-Upwind Schemes for Hyperbolic Conservation Laws and Hamilton-Jacobi Equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, **23**, 707–740. Dostupný z WWW: http://www.cscamm.umd.edu/centpack/publications/files/Kur-Noe-Ptr_semidiscrete_CU_SISC2001-centpack.pdf.
- VAN LEER, B. 1979. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method. *J. Comput. Phys.*, **32**, 101–136.
- VANDER MEÛLEN, R. 2006. *The Immersed Boundary Method for the (2D) Incompressible Navier-Stokes Equations*. Diplomová práce (M.Sc.), Delft University of Technology, Department of Aerospace Engineering, Chair of Aerodynamics. Dostupný z WWW: http://www.aero.lr.tudelft.nl/education/pdf/2006_1_01.pdf.

- MITTAL, R., & G., IACCARINO. 2005. Immersed Boundary Methods. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **37**, 239–261.
- MOHD-YUSOF, J. 1997. Combined Immersed-Boundary/B-Spline Methods for Simulations of Flow in Complex Geometries. *CTR Annual Research Briefs*, 317–327.
- OKAJIMA, A. 1982. Strouhal numbers of rectangular cylinders. *J. Fluid Mech.*, **123**, 379–398.
- PESKIN, C. S. 1982. The fluid dynamics of heart valves: Experimental, theoretical, and computational methods. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **14**, 235–259.
- SAHA, A. K., BISWAS, G., & MURALIDHAR, K. 2003. Three-dimensional study of flow past a square cylinder at low Reynolds numbers. *Int. J. Heat Fluid Flow*, **24**, 54–66.
- SHU, C.-W. 1988. Total-Variation-Diminishing Time Discretizations. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **9**, 1073–1084.
- SHU, C.-W., & OSHER, S. 1988. Efficient Implementation of Essentially Non-oscillatory Shock-Capturing Schemes. *J. Comput. Phys.*, **77**, 439–471.
- SOHANKAR, A., NORBERG, C., & DAVIDSON, J. 1995. Numerical Simulation of Unsteady Flow Around a Square Two-Dimensional Cylinder. *Pages 517–520 of: Twelfth Australasian Fluid Mechanics Conference*. The University of Sydney. Dostupný z WWW: http://www.tfd.chalmers.se/~lada/postscript_files/sydney_paper_ahmad.pdf.
- SOHANKAR, A., NORBERG, C., & DAVIDSON, J. 1997. Numerical Simulation of Unsteady Low-Reynolds Number Flow Around Rectangular Cylinders at Incidence. *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.*, **69–71**, 189–201.
- SPANIER, F. 2002. *Strömungen in komplexen Geometrien*. Diplomová práce (Dipl.), Ruhr-Universität Bochum, Institut für Theoretische Physik I Plasma- Laser- Atomphysik. Dostupný z WWW: <http://www.tp4.ruhr-uni-bochum.de/~fspanier/publikationen/dipl.pdf>.
- STROUHAL, V. 1878. Über eine besondere Art der Tonenregung. *Ann. Physik und Chemie, Neue Folge*, **5**, 216–251. Dostupný z WWW: http://www.weltderphysik.de/intern/upload/annalen_der_physik/1878/Band_241_216.pdf.

- TITAREV, V. A., & TORO, E. F. 2004. Finite-volume WENO schemes for three-dimensional conservation laws. *J. Comput. Phys.*, **201**, 238–260.
- TSENG, Y.-H., & FERZIGER, J. H. 2003. A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry. *J. Comput. Phys.*, **192**, 593–623.
- VERSTEEG, H. K., & MALALASEKERA, W. 1995. *An introduction to Computational Fluid Dynamics, The Finite Volume Method*. Harlow: Longman.
- WESSELING, P. 2001. *Principles of Computational Fluid Dynamics*. Berlin: Springer Verlag.