Zadanie

Overte, že vzťahy $u = tan(xy) + ln(x^2 + y^2)$ a $v = arcsin(2x) - (3^x)^y$ určujú na okolí $(u, v) = (0, -1)$ hladké funkcie $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, také, že $\varphi(0, -1) = 0$ a $\psi(0, -1) = 1$. Napíšte rovnicu dotyčnicovej roviny k grafu ψ v $(0, 1)$.

Riešenie

Veta o implicitných funkciách spomína funkcie F_1 a F_2. To sú vzťahy zo zadania upravené tak, aby na jednej strane rovnosti bola 0.

$F_1 \equiv tan(xy) + ln(x^2 + y^2) - u = 0$

$F_2 \equiv arcsin(2x) - (3^x)^y - v = 0$

Vo vete sa tiež spomína bod α. V našom prípade je to bod $\alpha = (u, v, x, y) = (0, -1, 0, 1)$. Skúsime overiť, či vzťahy F_1 a F_2 platia v tomto bode. O tom sa presvedčíme dosadením:

$F_1 \equiv tan(1 * 0) + ln(0^2 + 1^2) - 0 = 0$

$F_2 \equiv arcsin(2 * 0) - (3^0)^1 - (-1) = 0$

Ďalej potrebujeme overiť, či $\frac{D(F_1,F_2)}{D(x,y)}$ (determinant spomínaný vo vete) je v α rôzny od nuly. Na to potrebujeme derivácie podľa x a podľa y.

$\partial_x F_1 = \frac{y}{cos^2(xy)} + \frac{2x}{x^2+y^2}$, čo je v αrovné 1.

$\partial_y F_1 = \frac{x}{cos^2(xy)} + \frac{2y}{x^2+y^2}$, čo je v αrovné 2.

$\partial_x F_2 = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - 3^{xy} ln(3) y$, čo je v αrovné $2 - ln(3)$.

$\partial_y F_2 = 0 - 3^{xy} ln(3) x$, zčo je v αrovné 0.

Determinant z vety je v bode α teda rovný $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 - ln(3) & 0 \end{vmatrix} = 2(ln(3) - 2) \neq 0$. (Teraz mám pocit, že niekde som urobil chybu, lebo na skúške mi vyšiel trochu iný. Dôležité je, že nie je nulový). Tým sme overili podmienky vety o implicitných funkciách a vyriešili prvú časť úlohy.

Vieme teda, že x aj y sú naozaj závislé na u a v. My potrebujeme kvôli dotyčnici zistiť hodnoty $\partial_u y$ a $\partial_v y$ v bode $(0, -1)$. To sa urobí postupným derivovaním. Zderivujme teda F_1 a F_2 podľa u aj podľa v s tým, že $\frac{dy}{du} = y_u$, $\frac{dy}{dv} = y_v$, $\frac{dx}{du} = x_u$ a $\frac{dx}{dv} = x_v$.

$\partial_u F_1 = \frac{x_u y + x y_u}{cos^2(xy)} + \frac{2x_u + 2y_u}{x^2+y^2} - 1 = 0$

$\partial_v F_1 = \frac{x_v y + x y_v}{cos^2(xy)} + \frac{2x_v + 2y_v}{x^2+y^2} = 0$

$\partial_u F_2 = \frac{2x_u}{\sqrt{1-4x^2}} - 3^{xy} ln(3)(x_u y + x y_u) = 0$

$\partial_v F_2 = \frac{2x_v}{\sqrt{1-4x^2}} - 3^{xy} ln(3)(x_v y + x y_v) - 1 = 0$

Dosadíme $x = 0$ a $y = 1$ a dostaneme lineárne rovnice pre y_u, y_v, x_u, x_v:

$3x_u + 2y_u - 1 = 0$

$3x_v + 2y_v = 0$

$2x_u - ln(3)x_u = 0$

$2x_u - ln(3)x_v - 1 = 0$

Z nich jednoducho zistíme, že v bode α sú x_u =0, $x_v = \frac{1}{2-ln(3)}$, $y_u = \frac{1}{2}$ a $y_v = \frac{3}{2ln(3)-4}$.

Už nám ostáva len spomenúť si, ako vyzerá rovnice dotyčnice. Máme funkciu $y = \psi(u,v)$ a chceme dotyčnicu v $(0,-1)$. Zavedieme si $G \equiv \psi(u,v) - y = 0$ a hľadaná dotyčnica má rovnicu: $\partial_u G(u_0, v_0, y_0)(u - u_0) + \partial_v G(u_0, v_0, y_0)(v - v_0) + \partial_y G(u_0, v_0, y_0)(y - y_0) = 0$.

u_0, v_0, y_0 sú naše hodnoty z bodu α, $\partial_u G = y_u$, $\partial_v G = y_v$ a $\partial_y G = -1$. Tým je vlastne dotýčnicová rovina hotová:

$G \equiv \frac{1}{2}u + \frac{3}{2ln(3)-4}(v+1) - 1(y-1)$.