

# MATEMATICKÁ ANALÝZA III

## SÉRIE 8

7.12.2007

**Příklad 1 (10 bodů):** Vhodnou substitucí vyřešte následující diferenciální rovnice:

$$(a) \quad xy y' = (x^2 + y^2), \quad (b) \quad (x^2 + y^2)y' = 2xy, \quad (c) \quad (x + y) - (x - y)y' = 0, \\ (d) \quad y' = \frac{4}{3}y + x\sqrt{y}, \quad (e) \quad xy' = 4y + x^2\sqrt{y}, \quad (f) \quad y' = xy^2 + \frac{y}{x}.$$

**Příklad 2 (10 bodů):** Najděte partikulární řešení (hledejte jej ve tvaru  $xy = \text{const}$  a jeho pomocí snižte řád rovnice a nalezněte všechna řešení.

$$(a) \quad xy' + y = y^2 \ln x, \quad (b) \quad y' + 2xy = 2x^3y^3, \quad (c) \quad x^2y' + xy + x^2y^2 = 4.$$

**Příklad 3 (8 bodů):** Nalezněte fundamentální systém řešení následujících rovnic:

$$(a) \quad y''' - 3y'' - 3y' - y = 0, \quad (b) \quad 4y'' - 8y' + 5y = 0, \quad (c) \quad y''' + 4y'' + 13y' = 0.$$

**Příklad 4 (12 bodů):** Nalezněte obecný tvar řešení následujících rovnic:

$$(a) \quad y'' - 2y' - 3y = e^{4x}, \quad (b) \quad y'' + y = 4xe^x, \quad (c) \quad y'' - y = 2e^x - x^2, \\ (d) \quad y'' + y = 4 \sin x, \quad (e) \quad y'' - 3y' + 2y = x \cos x, \quad (f) \quad y'' - 3y' + 2y = \sin x.$$

**Příklad 5 (15 bodů):** Metodou variace konstanty řešte následující rovnice:

$$(a) \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}, \quad (b) \quad y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}, \quad (c) \quad y'' + 4y = 2 \tan x.$$

**Příklad 6 (15 bodů):** Řešte systémy rovnic:

$$(a) \quad x' = 2x + y, y' = 3x + 4; \quad (b) \quad x' = x - y, y' = y - 4x.$$

**Příklad 7 (15 bodů):** Metodou variace konstanty řešte systémy rovnic:

$$(a) \quad x' = 3x + 2y + 4e^t, y' = x + 2y, \quad (b) \quad x' = x - y + 2 \sin t, y' = 2x - y.$$

**Příklad 8 (15 bodů):** Převedením na systém prvního řádu vyřešte:

$$x'' = 2x - 3y, y'' = x - 2y.$$