# Poznámky

# ze Speciální teorie relativity

# Obsah

# Úvodem

Následující text shrnuje a rozšiřuje mé poznámky ze Speciální teorie relativity přednášené v základním kurzu fyziky v zimním semestru 1999/2000 na MFF UK. Nečiním si nároky na úplnost a bezchybnost textu (i když alespoň o tu se snažím), doufám jen, že materiál by mohl být užitečný studentům, kteří se seznamují s čtyřvektorovým formalismem a speciální relativitou.

Z mého dnešního pohledu jsem se rozhodl přidat několik odstavců osvětlujících infinitezimální Lorentzovy transformace a jejich vyjádření pomocí rapidity, což je užitečné pro kurz z Kvantové teorie pole. Komentáře a připomínky rád přijmu na adrese qitek@matfyz.cz

Jiří Kvita, 2004

# 1 Výchozí principy STR

Speciální teorie relativity (STR), Obecná teorie relativity (OTR), inerciální soustava (IS)

# 2 Lorentzova transformace

Budeme se zabývat transformací souřadnic $(t, x, y, z) \to (t', x', y', z')$ mezi soustavani $IS$ a $IS'$ ve standardní konfiguraci, čímž budeme rozumět skutečnost, že v čase $t = t' = 0$ osy obou systémů splývají a $IS'$ se pohybuje vůči $IS$ podél osy $x$ rychlostí $v$.

Lze ukázat, že transformace musí být lineární (v následujícím odstavci budeme používat čtyřvektorový formalismus, a tak je možné jej při prvím čtení přeskočit):

Uvažujme hodiny, které jsou v klidu vzhledem k soustavě $S$: $\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = 0$. Budiž $\tau$ čas naměřený hodinami. Pak z požadavku homogenity času musí být $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} =$ konst. Celkově můžeme oba požadavky zapsat jako

$$\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \text{konst} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 x_\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = 0\,.$$

V $IS'$ ze stejných důvodů

$$\frac{\mathrm{d}^2 x'_\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = 0\,.$$

Na druhou stranu však máme

$$\frac{\mathrm{d}x'_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}\tau}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 x'_\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2 x_\nu}{\mathrm{d}\tau^2}}_{0} + \frac{\partial^2 x'_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\sigma}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x_\sigma}{\mathrm{d}\tau}\,.$$

Aby byl výraz, jak požadujeme, nulový, musí nutně platit

$$\frac{\partial^2 x'_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\sigma} = 0 \quad \forall\, \mu, \nu, \sigma$$

což znamená, že transformace je lineární.

Z linearity pak můžeme psát

$$\begin{aligned} x' &= Ax + Bt + Cy + Dz + E \\ y' &= Fx + Gt + Hy + Iz + J \\ t' &= Kx + Lt + My + Nz + O\,. \end{aligned}$$

Lorentzovu transformaci odvodíme v následujících krocích:

- Věnujme se nejprve transformaci souřadnic $y$, $z$ kolmých na $x$. Z relativity toho, která soustava se pohybuje musí být transformační vztahy invariantní vůči takzvané $xz$-inverzi

  $$x \leftrightarrow -x'\,, \quad y \leftrightarrow y'\,, \quad z \leftrightarrow -z'\,, \quad t \leftrightarrow t'\,.$$

  Náš výběr souřadných soustav požaduje $y = 0 \Rightarrow y' = 0$ a tedy $y' = Hy$. Ze symetrie vůči $xz$-inverzi je ovšem $y = Hy'$ a tedy $H^2 = 1$. Pro $v \to 0$ musí být $y = y'$ a získáváme tak první "triviální" transformační vztahy

  $$y' = y\,, \quad z' = z\,. \tag{1}$$

- Pro počátek souřadnic $IS'$ $x' = 0$ pozorovaný z $IS$ musí platit $x = vt$. Odtud

$$C = D = E = 0\,, \quad x = -\frac{B}{A}t\,, \quad x = vt \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{A} = -v$$

  Máme tedy (s uvážením symetrie a relativity pohybu)

$$x' = A(x - vt)\,, \quad x = A(x' + vt')$$

- Nyní budeme aplikovat princip konstantní rychlosti světla: světelný signál vyslaný v čase $t = t' = 0$ urazí v jednotlivých soustavách vzdálenosti $x = ct\,, \quad x' = ct'$, přičemž $x$ a $x'$ budou tytéž světobody pozorované z $IS$ a $IS'$.

$$\begin{array}{rr} x' = ct' & x = ct \\ ct' = A(x - vt) & ct = A(x' + vt') \\ ct' = tA(c - v) & ct = t'A(c + v) \end{array}$$

  Vynásobením posledních dvou rovnic dostaneme

$$A^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

  a pro $A$ volíme kladné znaménko s ohledem na to, že pro $v \to 0$ musí být $x = x'$:

$$A \equiv \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,.$$

- Nyní nám stačí z nalezených rovnic

$$x' = \gamma(x - vt)\,, \quad x = \gamma(x' + vt') \tag{2}$$

  eliminovat $x'$. Vyjádříme-li si $x = \gamma^2(x - vt) + \gamma vt'$, bude

$$t' = \frac{1}{v\gamma}[x(1 - \gamma^2) + \gamma^2 vt]$$

  a podle identity

$$\frac{1 - \gamma^2}{\gamma v} = -\frac{v}{c^2}\gamma$$

  bude konečně

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\,. \tag{3}$$

Zavedením

$$\beta \equiv \frac{v}{c}\,, \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{4}$$

pak Lorentzova transformace zní

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ ct' &= \gamma(ct' - \beta x) \\ y' &= y \\ z' &= z\,. \end{aligned} \tag{5}$$

# 3 Relativistická kinematika

## 3.1 Skládání rychlostí

Opět uvažujme dvě inerciální soustavy $IS$ a $IS'$ v obvyklé konfiguraci, a těleso, které se vůči soustavě $IS$ pohybuje rychlostí

$$\vec{u} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\,.$$

Zajímá nás, jak vypadá jeho **relativní rychlost** vůči soustavě $IS'$

$$\vec{u} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}'}{\mathrm{d}t'}\,.$$

S použitím vztahů pro Lorentzovu transformaci (2) nalezneme

$$u_1' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\gamma(\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t)}{\gamma(\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x)} = \frac{u_1 - v}{1 - \frac{vu_1}{c^2}} \tag{6}$$

$$u_2' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}y}{\gamma(\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x)} = \frac{u_2}{\gamma\left(1 - \frac{vu_1}{c^2}\right)} \tag{7}$$

$$u_3' = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}z}{\gamma(\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x)} = \frac{u_3}{\gamma\left(1 - \frac{vu_1}{c^2}\right)} \tag{8}$$

Všimněme si, že skládáním podsvětelných rychlostí stále získáme podsvětelné rychlosti, a že objekt pohybující se rychlostí světla se bude stejnou rychlostí pohybovat v kterékoli inerciální soustavě (při $v < c$).

Často se ještě definuje rozdíl rychlostí (vzájemná rychlost) dvou těles, jak ji vidíme z dané inerciální soustavy: $\vec{u} - \vec{w} \in \langle c, c\rangle$. Tato rychlost je relevantní například v případě, kdy nás zajímá čas, za který se dvě tělesa minou, pozorujeme-li je v dané inerciální soustavě (rozdíl rychlostí například vystupuje ve vztahu pro tok bombardujících částic ve formulích pro účinný průřez).

### 3.1.1 Efekt strhávání světla médiem

Začněme následujícím problémem (dle [2], str. 77): nechme šířit světlo průhledným tekoucím médiem (kapalinou, plynem). Otázka zní, zda je světlo "strháváno" ve směru proudění (drag effect). Fizeau v roce 1851 ukázal, že (podle jeho interpretace) éter vskutku strhávání způsobuje, ale jen částečně, a to tak, že pozorovaná rychlost světla byla

$$u = u' + v(1 - 1/n^2)\,.$$

Z dnešního pohledu jde o to, jakou rychlostí se světlo šíří vzhledem k inerciální soustavě $IS'$, která se vůčí médiu pohybuje rychlostí $v$. Rychlost světla v daném prostředí je $u = c/n$, v naší soustavě, kde médium teče, bude podle relativistického skládání rychlostí

$$u' = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \approx (u' + v)\left(1 - \frac{u'v}{c^2}\right) \approx u' + v\left(1 - 1/n^2\right)$$

a STR nám tak rychle dává elegentní vysvětlení.

### 3.2 Dilatace času

V $IS$ uvažujme v počátku umístěné nehybné hodiny ($x \equiv 0$). Protože

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)\,,$$

bude pro časové intervaly mezi dvěma událostmi, které obě nastaly v $x \equiv 0$ (např. dvě po sobě jdoucí tiknutí hodinek), platit

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1) = \gamma \Delta t\,, \tag{9}$$

tedy v $IS'$ vidíme, že pohybující se hodiny v $IS$ jdou pomaleji, uběhne na nich kratší interval než v $IS$ (jest vždy $\gamma \geq 1$).

V praxi bývá problém nalézt hodiny, jejichž chod je jen málo ovlivněn zrychlením. Ideální laboratoří jsou například rozpady částic (minony vznikající v horních vrstvách atmosféry s dobou života kolem $2,197 \cdot 10^{-6}$s by bez dilatace svých "vnitřních hodin" i při rychlosti světla urazily pouhých 600m). Dilatace času je však pozorovatelná i s makroskopickými hodinami, první pokus byl proveden roku 1971 (Hafele, Keating, Science 177, 166, 1972) s přesnými cesiovými hodinami a komerčními aerolinkami! Další zajímavou aplikací jsou svazky částic v urychlovačích, které, majíce stejný náboj, podléhají elektrostatické repulzi na určité typické časové škále, která se (pozorována z laboratoře) prodlužuje s rychlostí oběhu.

Notoricky známý paradox dvojčat je typickým příkladem toho, že lidé si na rlativitu a závěry z ní plynoucí ještě stále nezvykli. Dvojče, které je vysláno na okružní cestu Vesmírem, se vrátí na Zemi, kde jeho protějšek zestárl, neboť viděl bratra či sestru pohybovat se a sledoval, jak mu plyne pomaleji čas. Argumenty lze zdánlivě obrátit a tvrdit, že totéž přece vidělo i dvojče–kosmonaut: bratr se vzdaloval, letěl, a také mu plynul čas pomaleji. Přesto, když se setkají, je nutné, aby existovala jediná fyzikální realita.

Problém je, že situace zdaleka není tak symetrická, aby bylo možno pohledy rovnocenně obrátit: na cestovatele působilo zrychlení, které vytváří onen skrytý rozdíl mezi oběma pozorovateli, paradox je tak vlastně plně vysvětlitelný až v rámci obecné relativity.

### 3.3 Kontrakce délek

V inerciální soustavě $IS$ uvažujme tyč, jejíž konce mají souřadnice $x_1$ a $x_2$, délka tyče je tedy $L = x_2 - x_1$. Proveďme nyní měření délky tyče v $IS'$, a to tak, že ve stejný čas $t'_1 = t'_2$ odečteme souřadnice konců tyče, a získáme tak události $(t'_1, x'_1)$ a $(t'_2, x'_2)$. Zajímá nás délka tyče v $IS'$

$$L' = x'_2 - x'_1\,.$$

Protože

$$x_1 = \gamma(x'_1 + vt'_1)\,, \qquad x_2 = \gamma(x'_2 + vt'_1)\,,$$

dostáváme jednoduše

$$L' = \frac{1}{\gamma}(x_2 - x_1) = \frac{L}{\gamma}\,. \tag{10}$$

V $IS'$ tedy naměřím pohybující se tyči **kratší délku** než v její klidové soustavě. Efekt má své kořeny v relativitě současnosti (museli jsme současně udělat rysky pro odečtení vzdálenosti). Podotkněme, že náš výsledek neznamená, že relativisticky se pohybující objekty *vypadají* kontrahovány, do reálného vzhledu objektů vstupují také efekty toho, že paprsky z různých částí tělesa k nám vyrazily v odlišný čas.

# 4 Minkowského prostoročas

## 4.1 Časoprostorový invariant

Minkowského prostoročas je jeviště pro fyzikální dění[1] a vyjadřuje oboustrannou provázanost časové a prostorových souřadnic v Lorentzově transformaci. Jde o pseudoeuklidovský prostor $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}$, jehož prvky jsou události. V klasické fyzice je invariantní veličinou vzdálenost $(\triangle l)^2 = (\triangle x)^2 + (\triangle y)^2 + (\triangle z)^2$. V jakémkoli vztažné soustavě je pak $(\triangle l)^2$ veličina nezávislá na výběru inerciálního systému. Ve speciální relativitě však musíme započítat i časovou odlehlost událostí:

$$(\triangle s^2) = -c^2(\triangle t)^2 + (\triangle l)^2 \tag{11}$$

$$(\triangle s)^2 = -c^2(\triangle t)^2 + (\triangle x)^2 + (\triangle y)^2 + (\triangle z)^2. \tag{12}$$

Že jde skutečně o invariant vůči Lorentzově transformaci, tj. $(\triangle s')^2 = (\triangle s)^2$, lze ověřit přímo dosazením transformačních vztahů.

## 4.2 Čtyřvektory

Zaveďme konvenci, kdy klasické 3-vektory budou mít složky značené indexy psanými **latinkou**, kdežto **čtyřvektory**, prvky Minkowského prostoročasu, budou mít složky indexované **řeckými písmeny**, tedy např.

$$x^\mu \quad \textit{značí} \quad x^0 \equiv ct, \quad x^1 \equiv x, \quad x^2 \equiv y, \quad x^3 \equiv z.$$

Řecký, prostoročasový, index tedy bude nabývat hodnot $0, 1, 2, 3$ a čtyřvektor má tvar $x^\mu = (ct, x, y, z) \equiv (ct, \vec{x})$ (řecký index ponecháváme na zdůraznění, že jde o 4-vektor).

Klasicky můžeme psát invariant pomocí Kroneckerova symbolu jako skalární součin

$$(\triangle l)^2 = \delta^i_j \,\triangle x_i \,\triangle x^j$$

V našem případě musíme zavést nový **Minkowského tensor** $\eta$ abychom mohli psát analogicky

$$(\triangle s)^2 = \eta_{\mu\nu} \,\triangle x^\mu \,\triangle x^\nu \,, \tag{13}$$

kde

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

[1] V obecné relativitě se pak i toto jeviště mění s hmotou a energií a samo vstupuje do hry.

je speciální případ metrického tensoru. V obecné relativitě je obecně

$$(\triangle s)^2 = g_{\mu\nu} \triangle x^\mu \triangle x^\nu \tag{15}$$

a metrický tensor nám říká, jak utvořit inavriantní vzdálenost ze souřadnicových odlehlostí. Vzdálenost závisí na křivosti plochy, podél které měřím, dle plochy se tvoří různě i invariant, tj. tensor poskytuje informaci o **geometrii**, ve které měřím vzdálenost. Pro ilustraci ještě přejděme ke sférickým souřadnicím (a místo $\triangle$ pišme d). Lze ukázat (diferencováním převodních vztahů mezi sférickými a kartézskými souřadnicemi), že v tomto případě je

$$(\mathrm{d}s)^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2) \quad \equiv \quad g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\vartheta \end{pmatrix}.$$

Zde již maticové elementy nejsou konstanty a podléhaly by derivování! V obecné relativitě bereme diferenciál d$s$, neboť jde o lokální infinitezimální veličinu charakterizující zakřivení prostoru v daném bodě. Uvědomme si, že prostoročasový interval d$s$ může být i veličina záporná.

V literatuře se lze setkat s definicí skalárního součinu čtyřvektorů, kde záporné znaménko přísluší všem prostorovým souřadnicím a kladné je u časové souřadnice (viz. přednášky z teorie pole na MFF nebo učebnice R. P. Feynmana). Jedná se však o pouhou konvenci výběru skalárního součinu se signaturou (1,3) nebo (3,1), fyzika zůstává stejná (pokud různé konvence nepomícháte:)

Nadefinujeme dále veličinu **vlastní čas**. Předpokládejme, že objekt je v klidu v dané IS, tedy d$x^i \equiv 0\,\forall\, i$, Jediná souřadnice, která se může měnit, je čas, který označíme pro odlišení jako $\tau$

$$-c^2\mathrm{d}\tau^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu. \tag{16}$$

## 4.3 Snižování a zvyšování indexů

Nadále budeme uvažovat konvenci, kde vektory mají indexy nahoře a formy dole. Pomocí Minkowského tensoru lze však indexy zvyšovat a snižovat. Index snížíme zapůsobením bilineární formy, výsledným produktem pak bude (lineární) forma:

$$E^\mu\eta_{\mu\nu} = E_\nu \tag{17}$$

Podotkněme, že Minkovského tensor je symetrický a lze tedy prohazovat indexy.

Zaveďme dále inversní Minkowského tensor definičním vztahem

$$\eta^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu \tag{18}$$

$\eta^{\mu\nu}$ je tedy inversní matice a ukazuje se, že jest opět

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Pak lze s indexy pracovat třeba následovně:

$$E^\alpha = \eta^{\alpha\nu} E_\nu = \eta^{\alpha\nu}\eta_{\nu\mu} E^\mu = \delta^\alpha_\mu E^\mu = E^\alpha \tag{20}$$

Skalární součin dvou vektorů lze pak psát jako

$$A \cdot B = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A_\nu B^\nu = A^\mu B_\mu \,. \tag{21}$$

Uvědomme si, že skalární součin je bilineární forma, která dvěma vektorům přiřadí podle jistých pravidel reálné či komplexní číslo a je výhodné jej representovat jako působení formy (prvek duálního prostoru) na vektor. Obdobně lze i **úžit tensory**, jako příklad si uveďme úžení tensoru ve dvou indexech:

$$T^{\alpha\beta\sigma}{}_{\gamma\beta\sigma} = T^\alpha{}_\gamma \,.$$

Má-li tensor **právě dva** indexy, pak jde v tomto případě o **stopu**[2]:

$$\mathrm{Tr}\, T = T^\sigma{}_\sigma = \eta_{\sigma\alpha} T^{\sigma\alpha} \equiv T \,.$$

## 4.4 Matice Lorentzovy transformace

Protožev transformace je kvůli zachování prostoročasového intervalu lineární, můžeme přechod od jednoho systému k druhému vyjádřit pomocí matice

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu \,. \tag{22}$$

Takže například

$$ct' = x'^0 = \Lambda^0{}_0 \; x^0 + \Lambda^0{}_1 \; x^1 + \Lambda^0{}_2 \; x^2 + \Lambda^0{}_3 \; x^3 \,.$$

Srovnáním se vztahy pro Lorentzovu transfomaci

$$x' \equiv x'^1 = \gamma(x^1 - vt) \equiv \gamma x^1 - \gamma \frac{v}{c}(ct) \tag{23}$$

$$ct' \equiv x'^0 = c\gamma(t - \frac{v}{c^2} x^1) \equiv \gamma ct - \gamma \frac{v}{c} x \tag{24}$$

a zavedením $\beta = \frac{v}{c}$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

což je matice **speciální** Lorentzovy transformace (tj. $\vec{v}$ má směr osy $x^+$, v čase $t = 0$ počátky obou systémů splývají, stejně tak osy $x \equiv x'$).

## 4.5 Inverzní Lorentzova transformace

Invariance prostoročasového intervalu

$$(x - y)^2 \equiv (x_\mu - y_\mu)(x^\mu - y^\mu) = (x'_\mu - y'_\mu)(x'^\mu - y'^\mu) \equiv (x' - y')^2$$

implikuje

$$\eta_{\mu\nu} \, \Lambda^\mu{}_\rho \, \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \,,$$

[2] Tr z anglického Trace, případně též Sp z německého Spur:)

tedy maticově

$$\mathbf{\Lambda}^{\mathrm{T}}\eta\,\mathbf{\Lambda} = \eta$$
$$\mathbf{\Lambda^{-1}} = \eta\,\mathbf{\Lambda}^{\mathrm{T}}\eta\,.$$

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$$
$$x^{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu}x'^{\nu}$$

## 4.6 Infinitezimální transformace

Nejprve si ze vztahů Lorentzovy transformace spočtěme

$$x' - ct' = \gamma(x - \beta ct - ct + \beta x) = \gamma(1+\beta)(x - ct)\,,$$
$$x' + ct' = \gamma(x - \beta ct + ct - \beta x) = \gamma(1-\beta)(x + ct)\,.$$

S uvážením, že

$$\gamma(1 \pm \beta) = \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}}$$

a zadefinováním **rapidity**[3] $\phi$

$$\phi \equiv \ln\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

nalezneme

$$x' - ct' = \mathrm{e}^{\phi}(x - ct)$$
$$x' + ct' = \mathrm{e}^{-\phi}(x + ct)\,.$$

Přímočaře tak můžeme ověřit zachování prostoročasového intervalu

$$x'^2 - c^2t'^2 = x^2 - c^2t^2\,.$$

Po jednoduchém dosazení dále nalezneme

$$x' = x\cosh\phi - ct\sinh\phi$$

$$ct' = -x\sinh\phi + ct\cosh\phi\,,$$

maticově pak

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi \\ -\sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

a nalezneme

$$\gamma = \cosh\phi\,, \qquad \beta\gamma = \sinh\phi\,.$$

Uvažujme nyní infinitezimální transformaci $\phi = \varepsilon$ (tedy malé rychlosti)

$$\mathbf{\Lambda}(\varepsilon)\begin{pmatrix} \cosh\varepsilon & -\sinh\varepsilon \\ -\sinh\varepsilon & \cosh\varepsilon \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\varepsilon} + \mathrm{e}^{-\varepsilon} & -\mathrm{e}^{\varepsilon} + \mathrm{e}^{-\varepsilon} \\ -\mathrm{e}^{\varepsilon} + \mathrm{e}^{-\varepsilon} & \mathrm{e}^{\varepsilon} + \mathrm{e}^{-\varepsilon} \end{pmatrix} =$$

[3] Často se rapidita definuje ještě s faktorem 1/2 před logaritmem.

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 & -2\varepsilon \\ -2\varepsilon & 2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon)\right] \simeq \Bigg[\mathbf{1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}}_{\equiv i\varepsilon \mathbf{N_x}}\Bigg]$$

A tedy

$$\mathbf{\Lambda}(\varepsilon) = \mathbf{1} + i\varepsilon\mathbf{N_x}\,.$$

Libovolnou Lorentzovu transformaci podél osy $x$ pak můžeme zapsat jako

$$\mathbf{\Lambda}(\phi) = \exp(i\phi\mathbf{N_x})\,,$$

kde **generátor boostu podél osy x**

$$\mathbf{N_x} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Ve třech rozměrech nalezneme

$$\mathbf{x}' = \exp\left(i\phi\vec{\mathbf{N}}\cdot\frac{\vec{v}}{v}\right)\mathbf{x}$$

$$\mathbf{N_x} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{N_y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{N_z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Tyto vztahy jsou hojně užívány v relativistické kvantové mechanice a teorii pole, kde se zkoumá Lorentzova a Poincaréova grupa.

# 5 Relativistická mechanika

## 5.1 Zákony zachování a relativistická hmotnost

## 5.2 Relativistická dynamika bez 4-vektorů

Relativisticky je tedy možné hybnost zadefinovat obdobně jako klasicky $\vec{p} = m\vec{v}$, pouze $m$ zde representuje relativistickou hmotnost $m = \gamma m_0$.
Relativistickou 3-sílu pak můžeme definovat obdobně, totiž jako časovou změnu impulsu

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}\ \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\,. \tag{26}$$

Zrychlení lze vyjádřit jako

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\left(\vec{F} - \vec{v}\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right)\,. \tag{27}$$

Zkusme si nyní odvodit konečný výraz pro zrychlení. S použitím

$$dE = c^2\mathrm{d}m\,, \qquad \mathrm{d}T = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \vec{F}\frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \vec{F}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t \tag{28}$$

a za předpokladu, že síla nemění klidovou hmotnost částice (viz diskuse u čtyřsíly) si nejprve spočítáme

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E) = \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_0c^2 + T\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{c^2}\vec{F}\cdot\vec{v}\,. \tag{29}$$

Zrychlení pak bude

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\left(\vec{F} - \frac{1}{c^2}\vec{v}\ \vec{F}\cdot\vec{v}\right) \tag{30}$$

Zrychlení tedy není obecně kolineární s působící silou. Uvažujme dva důležité speciální případy:

- $\vec{F}$ je kolineární s $\vec{v}$, pro jednoduchost uvažme i stejný smysl obou vektorů, tj. $\vec{F} = k\,\vec{v}$, kde $k > 0$. Pak

  $$\vec{a}_\parallel = \frac{1}{m}\left(\vec{F}_\parallel - \frac{v^2}{c^2}\vec{F}_\parallel\right) \tag{31}$$

  a tedy

  $$m\vec{a}_\parallel = \vec{F}_\parallel\frac{1}{\gamma^2} \tag{32}$$

  $$\vec{F}_\parallel = m_0\gamma^3\vec{a}_\parallel \tag{33}$$

  Můžeme tak přirozeně zavést “rovnoběžnou hmotnost” $m_\parallel = m_0\gamma^3$. Všimněme si, že pro udělování kostantního zrychlení potřebujeme, aby síla rostla s $\gamma^3$!

- Síla je kolmá na směr pohybu, $\vec{F}\cdot\vec{v} = 0$, a tak

  $$\vec{F}_\perp = m_0\gamma\vec{a}_\perp \tag{34}$$

  a odpovídající “kolmá hmotnost” je $m_\perp = m_0\gamma$.

## 5.3 4-rychlost, 4-zrychlení, 4-síla

V klasické mechanice je rychlost definována jako tečna k trajektorii: $v^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$. V relativitě však nemůžeme použít diferenciál $\mathrm{d}t$, neboť nejde o invariant, ale nabízí se vzít **vlastní čas** $\mathrm{d}\tau$. Je tedy rozumné nadefinovat **čtyřrychlost** jako

$$u^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \tag{35}$$

Spočtěme si výraz

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\frac{1}{c}\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu}} = \frac{c}{\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}}} \tag{36}$$

$\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}$ je rovno z definice $x^\mu$ výrazu $\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} = (c,\vec{v})$, neboť $\mathrm{d}x^0 = c\mathrm{d}t$. Skalární součin pod odmocninou je pak $c^2 - v^2$ a tedy

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \equiv \gamma \tag{37}$$

(pro lepší zapamatování se uvědomme, že vztah připomíná zdiferencovaný vztah pro dilataci času) a konečně

$$u^\mu = \gamma(c,\vec{v}) \tag{38}$$

Čtyřrychlost je normalizovaná:

$$\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = \eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}\tau^2} = \gamma^2(-c^2 + v^2) = -c^2\,. \tag{39}$$

Reálné čtyřrychlosti jsou časupodobné, skalární součin dvou čtyřrychlostí je záporný. Každý objekt se tedy v čtyřrozměrném prostoročase pohybuje právě rychlostí světla. Obdobně nadefinujeme **čtyřzrychlení**

$$a^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}v^\mu}{\mathrm{d}\tau}\,. \tag{40}$$

Všimněme si, že z $u{\cdot}u = -c^2 = \text{konst}$ plyne ortogonalita 4-rychlosti a 4-zrychlení:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(u\cdot u) = 2u\cdot a$$

$$a^\mu = \gamma\left(c\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}, \vec{v}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} + \gamma\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)\,.$$

Protože

$$\gamma = \left(1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}v_i}\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = \gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}$$

$$a^\mu = \left(\gamma^4\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c}, \vec{v}\gamma^4\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2} + \gamma^2\vec{a}\right)\,. \tag{41}$$

Vidíme, že $a^\mu = \gamma(0,\vec{a})$ pouze v případech

- $\vec{a}\cdot\vec{v} = 0$
- $\vec{v} = 0$, což nastane v klidovém systému studované částice.

$a^\mu \equiv 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$ v klidovém systému částice. S využitím identity

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

nalezneme

$$(u\times a)^2 = \vec{u}^2\vec{a}^2 - (\vec{u}\cdot\vec{a})^2$$

a můžeme si tak spočíst

$$\alpha^2 \equiv a^2 = a_\mu a^\mu = \gamma^6\left(\vec{a}^2 - \frac{(\vec{v}\times\vec{a})^2}{c^2}\right)$$

a ve shodě s našimi předchozími výsledky nalezneme, že

- pro $\vec{v}\|\vec{a}$ je $\alpha = \gamma^3|\vec{a}|$
- pro $\vec{v}\perp\vec{a}$ je $\alpha = \gamma^2|\vec{a}|$

Nadefinujme **čtyřsílu**

$$F^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}\tau}u^\mu + m_0 a^\mu \tag{42}$$

$$F^\mu = \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma m_0 c, m_0\gamma\vec{v}) = \gamma\left(\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right) = \gamma\left(\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}, \vec{F}\right)\,,$$

kde $\vec{F}$ je již dříve zavedená Lorentzova 3-síla.
Spočtěmě si skalární součin

$$F^\mu u_\mu = \frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}\tau} u^\mu u_\mu + m_0 \underbrace{a^\mu u_\mu}_{0} = -c^2 \frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}\tau}$$

$$F^\mu u_\mu = -\gamma^2 \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} + \gamma^2 \vec{F} \cdot \vec{v} = \gamma \left( \vec{F} \cdot \vec{v} - \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \right) .$$

Síla zachovávající klidovou hmotnost je tedy charakterizována tím, že

$$F^\mu u_\mu = 0 \Leftrightarrow \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow F^\mu = \gamma \left( \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}, \vec{F} \right) \tag{43}$$

a platí tak pro ni vztah známý z Newtonovy mechaniky

$$\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}E \, ,$$

změna energie je pak čistě kinematická.

# 6 Relativistická elektrodynamika

Už klasická elektrodynamika (KED) je invariantní vůči Lorentzově transformaci, přepisem Maxwellových rovnic do "čtyřvektorového hávu" tak tedy v principu nemůžeme získat nic nového, vztahy však nabudou nového symetričtějšího tvaru a nově rozpoznáme např. příčný Dopplerův efekt. Samotná invariance rovnic elektrodynamiky se dokonce stala stimulem pro speciální relativitu, jejíž kořeny tak musíme hledat od Einsteina a Lorentze až k Maxwellovi.
Připomeňme si několik výsledků KED:

$$\mathrm{rot}\, \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \mathrm{div}\, \vec{B} = 0 \tag{44}$$

$$\mathrm{div}\, \vec{D} = \varrho \qquad \mathrm{rot}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \, . \tag{45}$$

Je výhodné zavést elektromagnetické potenciály a nejednoznačnost v jejich volbě určit Lorenzovou kalibrační podmínkou:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathrm{div}\, \vec{A} \;= 0 \tag{46}$$

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\, \vec{A} \qquad \vec{E} = -\mathrm{grad}\, \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \, . \tag{47}$$

Budeme-li uvažovat lineární homogenní isotropní prostředí, lze použít lineární materiálové vztahy

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H} \tag{48}$$

Celkovou proudovou hustotu $\vec{j}$ si můžeme rozložit (Kvasnica, X.I) na vodivý proud $\sigma \vec{E}$ a prudovou hustotu $\vec{J}$ vnějších zdrojů: $\vec{j} = \vec{J} + \sigma \vec{E}$. Totální proud získáme připočtením Maxwellova proudu $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. Za těchto podmínek pak přejdou vlnové rovnice pro potenciály do výhodného tvaru

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon} \tag{49}$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{j}\,. \tag{50}$$

Zdroje vystupující v těchto rovnicích určují výsledné pole, nejsou jimi však dány pohybové rovnice těchto zdrojů. Z rovnic plyne na zdroje jediné omezení, a to rovnice kontinuity vyplývající přímo z Maxwellových rovnic:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} - \operatorname{div}\vec{j} = 0\,. \tag{51}$$

Potenciály $\vec{A}$ a $\varphi$ mají dohromady čtyři nezávislé složky, jsou však vázány Lorenzovou kalibrační podmínkou. Celkem máme tedy tři nezávislé veličiny namísto původně šesti složek vektorů $\vec{B}$ a $\vec{E}$. Za to jsme ovšem zaplatili zvýšením řádu rovnic z prvního (Maxwell) na druhý.

Čtyři složky potenciálů (byť provázané) nás vedou k myšlence zavést potenciál jediný, **čtyřpotenciál**. Pokusme se jej nadefinovat následovně (později výhody této definice oceníme):

$$A^\mu = \left(\frac{\varphi}{c}, \vec{A}\right) \tag{52}$$

Ještě si nadefinujme **čtyřgradient**

$$\partial^\mu = \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)\,, \tag{53}$$

s jehož pomocí bude čtyřdivergence čtyřvektoru zapsatelná jako

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = \eta_{\mu\nu}\,\partial^\mu A^\nu = \partial_\nu\,A^\nu = \partial\cdot A \tag{54}$$

Z definice snadno ověříme, že Lorenzova podmínka se pak dá zapsat elegantně jako

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} \equiv A^\mu{}_{,\mu} = 0, \tag{55}$$

kde jsme použili značení derivace jako “,”, což značí, že veličina je derivována podle všech indexů (horních i dolních!), ktreré následují za čárkou.

Dále si zadefinujme čtyřrozměrnou analogii Laplaceova operátoru, a uvidíme, že se vlastně jedná o **operátor d'Alembertův** (skalární součin dvou čtyřgradientů):

$$\Box \equiv \partial\cdot\partial = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\,\partial_\nu = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \tag{56}$$

Jde přesně o operátor vystupující ve vlnové rovnici. S výhodou můžeme dále zadefinovat **hustotu čtyřproudu** (čtyřproud):

$$J^\mu = (c\varrho, \vec{j}\,) \tag{57}$$

Vlnové rovnice pak přejdou v jedinou

$$\Box A^\rho = -\mu J^\rho \tag{58}$$

(uvědomme si, že $\mu$ označuje permeabilitu vakua). Ověřme si pro zajímavost ekvivalenci rovnic pro index $\mu = 0$:

$$\Box A^0 = \Box \frac{\varphi}{c} = \frac{1}{c}\Delta\varphi + \frac{1}{c^3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \mu J^0 = \mu\varrho c = -\frac{\varrho}{c\varepsilon}. \tag{59}$$

Použitím $c^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}$ skutečně získáme první z (nehomogenních) vlnových rovnic pro potenciály.

Do elegantního tvaru nám také přejde rovnice kontinuity, rozepsáním si snadno ověříme, že ji lze zapsat jako čtyřdivergenci čtyřproudové hustoty:

$$J^{\mu}{}_{,\mu} = 0. \tag{60}$$

Čeká nás však ještě úkol ověřit, zda nově zavedené veličiny jsou skutečně čtyřvektory. Uvědomíme-li si, že klasická hustota proudu je $\vec{j} = \varrho\vec{v}$, pak můžeme psát

$$J^{\mu} = (c\varrho, \varrho\vec{v}) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V}(c, \vec{v})\,. \tag{61}$$

Ovšem objem $V$ není relativistický invariant, tím je zase pouze vlastní objem $V_0$:

$$dV_0 = \gamma \mathrm{d}V \qquad \varrho = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V_0}\frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}V} = \gamma\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V_0} = \gamma\varrho_0\,, \tag{62}$$

$$J^{\mu} = \varrho_0\gamma(c, \vec{v}) = \varrho_0 u^{\mu}\,. \tag{63}$$

Vidíme, že čtyřprudová hustota $J^{\mu}$ je pouze násobkem čtyřrychlosti $u^{\mu}$, neboť $\varrho_0$ je skalár, invariant. Čtyřproud je tedy čtyřvektor. Z vlnové rovnice plyne, že čtyřvektorem je i $A^{\mu}$, neboť d'Alembertián se dá vpodstatě chápat jako skalár, byť jde o operátor, a máme tedy rovnici, v níž na jedné straně je násobek čtyřvektoru, čímž i na levé straně musí vystupovat čtyřvektor-čtyřpotenciál. Připomeňme však, že z definice je čtyřvektor veličina transformující se následujícím způsobem:

$$A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, A^{\nu}. \tag{64}$$

## 6.1 Tensor elektromagnetického pole

Nejprve několik poznámek ke klasickým vektorům elektromagnetického pole: $\vec{B}$ je takzvaný axiální vektor, při inverzi souřadnic nemění svůj směr v kontrastu s polárními, které mění znaménko. Axiální vektory vznikají vektorovým součinem dvou polárních vektorů, původně jde totiž o tensory. Tak jest například

$$B_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i\,. \tag{65}$$

Jde o antisymetrický tensor, jenž má tři nezávislé složky (na diagonále jsou nuly a dále $B_{ij} = -B_{ji}$), které můžeme ztotožnit se složkami nějakého vektoru následujícím vztahem:

$$B^k = \frac{1}{2}\epsilon^{kij}B_{ij}. \tag{66}$$

Inverzní vztah pak zní:

$$B_{ij} = \epsilon_{ijk}B^k\,. \tag{67}$$

V Minkowského prostoru zavedeme antisymetrický tensor, jenž bude mít šest nezávislých složek a nebude již tedy rozumné jej ztotožnit s jedním vektorem, ale se dvěma: $\vec{E}$ a $\vec{B}$. Pokusme se tedy o čtyřrozměrné rozšíření tensoru $B_{ij}$ následujícím způsobem:

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}\,. \tag{68}$$

Pokusme se zjistit, jak tensor vypadá. Vidíme, že jeho prostorová část je shodná s původním klasickým tensorem:

$$F_{ij} = B_{ij} = \epsilon_{ijk}B^k. \tag{69}$$

Jde opět o tensor antisymetrický, tj i jeho stopa bude $F^i{}_i = 0$. Jak je tomu s časovými složkami?

$$F_{0j} = A_{j,0} - A_{0,j} = A^j{}_{,0} + A^0{}_{,j} = \frac{1}{c}\frac{\partial A^j}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = -\frac{E^j}{c} \tag{70}$$

(pokud zvedáme nahoru latinský index, nic se neděje, zvednutím "nuly" však musíme změnit znaménko, neboť v naší konvenci$\eta_{00} = -1$)

Vidíme, že časové složky jsou složkami vektoru elektrické intenzity. Konečně se můžeme podívat na výsledný tvar **tensoru elektromagnetického pole**:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E^1}{c} & -\frac{E^2}{c} & -\frac{E^3}{c} \\ \frac{E^1}{c} & 0 & B^3 & -B^2 \\ \frac{E^2}{c} & -B^3 & 0 & B^1 \\ \frac{E^3}{c} & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{71}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E^1}{c} & \frac{E^2}{c} & \frac{E^3}{c} \\ -\frac{E^1}{c} & 0 & B^3 & -B^2 \\ -\frac{E^2}{c} & -B^3 & 0 & B^1 \\ -\frac{E^3}{c} & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{72}$$

Nejdůležitější vektory elmag. pole $\vec{E}$ a $\vec{B}$ (určují Lorenzovu sílu a tím tedy i působení pole) jsou svázány do jednoho tensoru (a to opět velice výhodně, jak uvidíme za chvíli). Obě pole jsou provázaná a nemá tak smysl hovořit o samostatném elektrickém či magnetickém poli. $\vec{E}$ a $\vec{B}$ jsou totiž složky tensoru a nejsou invarianty, závisí na pozorovateli. Mám-li však alespoň jednu složku tensoru $F^{\mu\nu}$ nenulovou, nemohu již najít takový inerciální systém, kde by byly nulové všechny složky. Lze však najít systémy, kde např. jeden pozorovatel pozoruje pouze pole magnetické, zatímco druhý třeba pouze elektrické a třetí obě. Tensor elektromagnetického pole se obecně transformuje jako dvakrát kontravariantní vektor (každý index se transformuje pomocí matice Lorentzovy transformace)

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta} \tag{73}$$

## 6.2 Maxwellovy rovnice

Nyní si odvodíme základní soustavu rovnic elektrodynamiky za pomoci námi zavedených nových veličin z předchozího odstavce. Nejprve si ale trošku zaderivujeme, spočtěme si čtyřdivergenci tensoru elmag. pole (jde o úžení tensoru):

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = A^{\nu,\mu}{}_{\nu} - A^{\mu,\nu}{}_{\nu} \tag{74}$$

Pokud u prvního členu v rozdílu prohodíme pořadí derivací, získáme (derivovanou) Lorenzovu kalibrační podmínku, a tedy první člen je identická nula. Ve druhém členu máme stopu přes d'Alembertián a získáme tak vlnový operátor. S použitím vlnové rovnice pro čtyřpotenciál dostaneme výsledek

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = -\Box A^{\mu} = \mu J^{\mu} \tag{75}$$

Dále si ukážeme, že v této soustavě jsou zahrnuty všechny Maxwellovy rovnice ve vakuu.

- Spočtěme si nejprve prostorové složky rovnice: pro $\mu = i$

  $$F^{i0}{}_{,0} + F^{ij}{}_{,j} = \mu J^{i}$$

  Rozepsáním jednotlivý složek

  $$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E^i}{\partial t} + \epsilon^{ijk}\partial_j B_k = \mu J^i\,,$$

  kde ve druhém členu poznáváme vektorový součin nabla-operátoru s vektorem magnetické indukce, tj.

  $$-\varepsilon\mu\frac{\partial E^1}{\partial t} + (\operatorname{rot}\vec{B})^i = \mu J^i$$

  Uvážíme-li, že $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$ a $J^i = j^i$, dostaneme

  $$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\,.$$

- Podíváme-li se na časovou složku rovnice, získáme

  $$F^{0\nu}{}_{,\nu} = F^{0j}{}_{,j} = \mu J^0 = \mu c\varrho$$

  Jde o divergenci prostorové části prvního řádku tensoru elmag. pole, tedy:

  $$\frac{1}{c}\operatorname{div}\vec{E} = \mu c\varrho$$

  $$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon},$$

  čímž máme uzavřenu první sérii Maxwellových rovnic.

- Nyní si následovně zadefinujme takzvaný **cyklický index**:

  $$F_{[\mu\nu\varrho]} \equiv F_{\mu\nu,\varrho} + F_{\varrho\mu,\nu} + F_{\nu\varrho,\mu}$$

  $$= A_{\nu,\mu\varrho} - A_{\mu,\nu\varrho} + A_{\mu,\varrho\nu} - A_{\varrho,\mu\nu} + A_{\varrho,\nu\mu} - A_{\nu,\varrho\mu} = 0$$

  Výraz je tedy plně antisymetrický vzhledem ke všem indexům. Protože vztah platí pro všechny trojice indexů, můžeme si nejprve vybrat třeba

◦ $\mu\nu\varrho = 123$:

  $$F_{12,3} + F_{32,1} + F_{21,3} = B^3{}_{,3} + B^2{}_{,2} + B^1{}_{,1}$$

  a tedy

  $$\operatorname{div}\vec{B} = 0$$

- $\mu\nu\varrho = 0jk$:

$$F_{0j},_k + F_{k0},_j + F_{jk},_0 = -\frac{1}{c} E_j,_k + \frac{1}{c} E_k,_j + \frac{1}{c}\,\epsilon_{jkl}\frac{\partial B^l}{\partial t} = 0$$

Vynásobme rovnici výrazem $\epsilon^{ijk}$:

$$-\partial_t\,\epsilon_{jkl}\,\epsilon^{ijk} B^l = \epsilon^{ijk}\partial_j\,E_k - \epsilon^{ijk}\partial_k\,E_j$$

Pokud u druhého členu pravé strany prohodíme indexy $jk$ v Levi-Civitově tensoru (čímž se nám změní znaménko), získáme stejný vektorový součin jako ve členu prvním, celkem tedy (po přeznačení indexů) $2\,\mathrm{rot}\,\vec{E}$. Dále je třeba si uvědomit, že $\epsilon_{jkl}\,\epsilon^{ijk} = \epsilon_{ljk}\,\epsilon^{ijk} = 2\delta^i_l$. Tedy

$$-2\delta^i_l\,\partial_t B^l = 2\epsilon^{ijk}\,\partial_j E_k$$

$$-\frac{\partial B^i}{\partial t} = (\mathrm{rot}\,\vec{E})^i$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,,$$

čímž máme Maxwellovy rovnice uzavřeny.

## 6.3 Poznámka ke kalibraci potenciálů

Telegrafní rovnice pro potenciály (odvozené z Maxwellových rovnic a z materiálových vztahů ($\vec{j} = \vec{J} + \sigma\vec{E}$, $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$) a za pomoci identity $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div} - \Delta$ ) v lineárním obecně vodivém prostředí mají tvar

$$\Box\vec{A} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\vec{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mu\sigma\varphi\right) = -\mu\vec{J} \tag{76}$$

$$\Delta\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{div}\,\vec{A} = -\frac{\varrho}{\varepsilon}\,. \tag{77}$$

Druhou rovnici lze upravit přičtením dvou nulových výrazů na

$$\Box\varphi - \mu\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\,(\mathrm{div}\,\vec{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mu\sigma\varphi) = -\frac{\varrho}{\varepsilon} \tag{78}$$

Zde vidíme výhodnost zavedení Lorenzovy podmínky, jejíž obecný tvar zní:

$$\mathrm{div}\,\vec{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sigma\mu\varphi = 0 \tag{79}$$

Jejím aplikováním vymizí třetí členy na pravých stranách. Ukážeme, že Lorenzovu podmínku lze na vždy splnit, jinými slovy lze najít takové potenciály, které ji budou splňovat.

Je jednoduché si ověřit, že potenciály $\vec{A}$ a $\varphi$ se dají změnit následujícím způsobem, aniž by to mělo vliv na fyzikální pole[4] $\vec{E}$, $\vec{B}$:

[4] Hovoříme o kalibrační invarianci Maxwellových rovnic (moderní teorie pole jako třeba teorie elektroslabých iterakcí či kvantová chromodynamika jsou postaveny na principu kalibrační invariance vůči určité grupě transformací, v našem případě jde o grupu $U(1)$).

$$\vec{A}^{+} = \vec{A} + \operatorname{grad}\chi \tag{80}$$

$$\varphi^{+} = \varphi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{81}$$

Dosaďme do Lorenzovy podmínky v nevodivém prostředí:

$$\operatorname{div}\vec{A}^{+} + \varepsilon\mu\frac{\partial \varphi^{+}}{\partial t} + \operatorname{div}\operatorname{grad}\chi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0 \tag{82}$$

Vidíme, že nově zavedené potenciály budou Lorenzovu podmínku splňovat, pokud pro kalibrační funkci $\chi$ bude platit vlnová rovnice:

$$\Box\chi = 0. \tag{83}$$

Pak budou telegrafní rovnice vlnovými nehomogenními rovnicemi, a naštěstí již nebudou tak silně provázány.

$$\Box\vec{A} - \mu\sigma\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\mu\vec{J}$$

$$\Box\varphi - \mu\sigma\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\varrho}{\varepsilon} \tag{84}$$

Podotkněme, že například pomocí Greenovy funkce se dá ukázat, že rovnice pro $\chi$ je vždy řešitelná a potenciály lze pokaždé takto nakalibrovat.

Zapišme nyní tyto podmínky ve tvaru čtyřvektorů: Zaveďme nový **čtyřpotenciál** (pozměněný o čtyřgradient skalární funkce) vztahem:

$$A^{+\mu} = \left(\frac{\varphi^{+}}{c}, \vec{A}^{+}\right) = \left(\frac{\varphi}{c} - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}, \vec{A} + \Delta\chi\right) = A^{\mu} + \partial^{\mu}\chi \tag{85}$$

při podmínce $\Box\chi = 0$.

Pak tensor elmag. pole bude (ze záměny derivací) nezměněn:

$$F^{+\mu\nu} = A^{+\nu},^{\mu} - A^{+\mu},^{\nu} = A^{\nu},^{\mu} - A^{\mu},^{\nu} + \partial^{\mu}\partial^{\nu}\chi - \partial^{\nu}\partial^{\mu}\chi = F^{\mu\nu}$$

Podívejme se, jak je tomu s vlnovou rovnicí:

$$\Box A^{+\mu} = \partial^{\alpha}\partial_{\alpha}A^{+\mu} = \partial^{\alpha}\partial_{\alpha}(A^{\mu} + \partial^{\mu}\chi = \Box A^{\mu} + \partial^{\mu}\partial^{\alpha}\partial_{\alpha}\chi = \Box A^{\mu} + \partial^{\mu}\Box\chi$$
$$= \Box A^{\mu} = -\mu J^{\mu}.$$

Vlnová rovnice je tedy vskutku nezměněna. Pro orientaci a pro ujasnění pojmů si to můžete ověřit i ve složkách:

- Položme $\mu = j$:

$$\Box A^{+j} = \partial^{\alpha}\partial_{\alpha}\left(A^{j} + \frac{\partial \chi}{\partial x^{j}}\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(A^{j} + \frac{\partial \chi}{\partial x^{j}}\right) + \Delta\left(A^{j} + \frac{\partial \chi}{\partial x^{j}}\right)$$
$$= \Box A^{j} + \frac{\partial}{\partial x^{j}}\Box\chi = -\mu j^{j}$$

- Položme $\mu = 0$:

$$\Box A^{+0} = \partial^{\alpha}\partial_{\alpha}A^{+0} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varphi - \frac{\partial \chi}{\partial t}\right) + \Delta\left(\varphi - \frac{\partial \chi}{\partial t}\right) = \Box\,\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\Box\,\chi$$
$$= \Box\,\varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon}$$

## 6.4 Vlnová rovnice

Zkusme si vyřešit vlnovou rovnici

$$\Box A^\mu = 0 \tag{86}$$

ve vakuu. Hledejme řešení ve tvaru harmonických vln

$$A^\mu = \epsilon^\mu \mathrm{e}^{ik_\sigma x^\sigma}\,, \tag{87}$$

($A_0^\mu$ je amplituda a $k_\sigma$ je vlnový vektor) spolu s podmínkou

$$A^\mu{}_{,\mu} = 0 \tag{88}$$

Dosazením naší násady získáme dvě podmínky

- Z vlnové rovnice plyne

$$\Box A^\mu = \partial^\alpha \partial_\alpha A^\mu = \partial^\alpha (ik_\alpha A^\mu) = -k^\alpha k_\alpha A^\mu = 0 \tag{89}$$

  Aby byl výraz nulový, musí být $k_\alpha k^\alpha = 0$, ale to znamená, že **signál se šíří rychlostí světla**, jde o tečnu ke světelnému kuželi.

- Z Lorenzovy podmínky pak

$$A^\mu{}_{,\mu} = ik_\mu A^\mu = 0 \Rightarrow \epsilon^\mu k_\mu = 0\,, \tag{90}$$

  tj. 4-potenciál je ortogonální k vlnovému vektoru a specálně i polarizační vektory $\epsilon^\mu$. Ve čtyřrozměrném prostoru můžeme najít ortogonální systém polarizačních vektorů $\varepsilon^\mu(k,\lambda)$

  - $\lambda = 1, 2$: $\varepsilon^\mu(k,\lambda) = (0, \vec{\varepsilon}(k,\lambda))$, kde $\vec{k}\cdot\vec{\varepsilon} = 0$ (transverzální polarizace)
  - $\lambda = 0$: $\varepsilon^\mu(k,\lambda) = (1,0,0,0)$ ("skalární" polarizace)
  - $\lambda = 3$: $\varepsilon^\mu(k,\lambda) = (0, \vec{k}/|\vec{k}|)$ (longitudinální)

  Z nich jsou fyzikální polarizace splňující Lorenzovu podmínku pouze případy $\lambda = 1, 2$.

Obecné řešení vlnové rovnice spolu s Lorenzovou podmínkou můžeme pro reálný 4-potenciál ($A^\mu = A^{\mu *}$) zapsat jako

$$A^\mu(x) = \int \mathrm{d}^3k \sum_{\lambda=1}^{2} \left[a(k,\lambda)\epsilon^\mu(k,\lambda)\mathrm{e}^{-ik\cdot x} + a^+(k,\lambda)\epsilon^{\mu *}(k,\lambda)\mathrm{e}^{ik\cdot x}\right]\,. \tag{91}$$

Ověřme nyní, že vlnový vektor je skutečně 4-vektor: $k_\sigma x^\sigma$ musí být skalár, ale protože $x^\sigma$ je čtyřvektor polohy, musí být i $k_\sigma$ čtyřvektor. Jak souvisí $k^\sigma$ s klasickým vektorem $\vec{k}$? Ve třírozměrném prostoru máme fázi vyjádřenu jako

$$\mathrm{e}^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}.$$

Pak srovnáním s

$$\mathrm{e}^{ik_\sigma x^\sigma}$$

získáme

$$k_0 ct = -\omega t, \quad \text{tedy} \quad \mathrm{k}_0 = -\frac{\omega}{\mathrm{c}}.$$

A prostorové složky obou vektorů jsou shodné:

$$k_\sigma = \left(-\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right) \tag{92}$$

$$k^\sigma = \frac{\omega}{c}(1, \vec{n}), \tag{93}$$

kde $\vec{n}$ je jednotkový vektor ve směru šíření vlny.

## 6.5 Dopplerův jev

## 6.6 Lorenzova 4-síla

Lorenzova 3-síla je dána známým vzorcem

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{94}$$

Ukázali jsme, že pro obecnou čtyřsílu platí

$$F^\mu = \left(c\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau};\ \gamma\vec{F}\right) \tag{95}$$

Vydáme se ale jinou cestou, již známe složky tensoru $F^{\mu\nu}$ i čtyřrychlost, sestavíme tedy následující výraz a pak jej podrobně prozkoumáme:

$$F_L^\mu = qF^{\mu\nu}u_\nu, \tag{96}$$

kde q je skalár, náboj zkoumané částice.

- Jest $F^{00} = 0$
- $F_L^0 = qF^{0j}u_j = q\frac{E_j}{c}\gamma v_j = \frac{\gamma}{c}\vec{E}\cdot\vec{v}$, neboť $u^\mu = \gamma(c, \vec{v})$ a $u_0 = -\gamma c$ (snížením indexu se změní znaménko).
- $F_L^i = q(F^{i0}u_0 + F^{ij}u_j) = q\left(\frac{E^i}{c}\gamma c + \epsilon^{ijk}B_k\gamma v_j\right) = \gamma q[E^i + (\vec{v}\times\vec{B})^i]$.
- Fyzikální význam 0-té složky: $q\vec{E}$ je elektrická síla, $q\vec{E}\cdot d\vec{r}$ je přírůstek práce, časovou derivací získáme výkon, ale $\gamma = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}$, tedy $F_L^0$ má význam **výkonu elektrické síly na jednotku vlastního času**.
- Pro obecnou čtyřsílu platí $\eta_{\mu\nu}F^\mu u^\nu = \frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}\tau}(-c^2)$, pokud je tedy čtyřsíla kolmá k čtyřrychlosti, pak jest $m_0 =$ konst! Pro Lorenzovu čtyřsílu platí:

  $$\eta_{\mu\nu}F_L^\mu u^\mu = qF^{\mu\nu}u_\nu u_\mu = 0,$$

  neboť $F^{\mu\nu}$ je antisymetrický. Pro obecný symetrický tensor $S^{\mu\nu}$ a antisymetrický $A^{\mu\nu}$ totiž platí $S^{\mu\nu}A_{\mu\nu} = S^{\nu\mu}A_{\nu\mu} = -S^{\mu\nu}A_{\mu\nu}$, kde jsme jednou přeznačili indexy (prohodili) a využili symetričnosti respektive antisymetričnosti tensorů. Jediná možnost, jak rovnost může být splněna je, že se jedná o identickou nulu.
- Nakonec uveďme explicitní tvar **Lorenzovy čtyřsíly**:

  $$F_L^\mu = q\gamma\left(\frac{\vec{E}\cdot\vec{v}}{c},\ \vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) = \left(q\gamma\frac{\vec{E}\cdot\vec{v}}{c},\ \gamma\vec{F}_L\right) \tag{97}$$

## 6.7 Hustota Lorenzovy čtyřsíly

Již víme, že Lorenzova síla nemění klidovou hmotnost částice $m_0$ (což platí pro většinu sil). Pro odvození hustoty síly nebudeme provádět derivaci podle objemu $\mathrm{d}V$, neboť nejde o invariant, ale podle vlastního objemu $\mathrm{d}V_0$, které spojuje vztah $V_0 = \gamma \mathrm{d}V$ neboť $\mathrm{d}V_0 = \mathrm{d}x_0 \wedge \mathrm{d}y_0 \wedge \mathrm{d}z_0 = \gamma \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \gamma \mathrm{d}V$ Tedy objemová hustota čtyřsíly bude:

$$\Phi^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}F_L^\mu}{\mathrm{d}V_0} = \left( \frac{\mathrm{d}F^0}{\mathrm{d}V_0},\ \frac{\mathrm{d}(\gamma \vec{f})}{\gamma \mathrm{d}V} \right) = \left( \frac{\mathrm{d}F^0}{\mathrm{d}V_0},\ \vec{\Phi} \right), \tag{98}$$

kde $\vec{\Phi}$ je objemová hustota klasické Lorenzovy síly. S použitím vztahů $\vec{j} = \varrho \vec{v}$, $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V^0} = \varrho_0$ a $\varrho = \gamma \varrho_0$ si tedy spočtěme

$$\frac{\mathrm{d}F^0}{\mathrm{d}V^0} = \frac{1}{c} \frac{\mathrm{d}(q\gamma \vec{E} \cdot \vec{v})}{dV^0} = \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{j} \tag{99}$$

Jediné, co lze rozumně derivovat podle objemu, jest náboj, a tak získáme nábojovou hustotu:

$$\Phi_L^\mu = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V^0} F^{\mu\nu} u_\nu = F^{\mu\nu} J_\nu = \left( \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{J},\ \vec{\Phi} \right) \tag{100}$$

## 6.8 Zákony zachování v elektrodynamice

Zadefinujme **tensor energie a hybnosti**

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu} \left( F^{\mu\nu} F^{\mu}{}_{\sigma} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\varrho\sigma} F_{\varrho\sigma} \right) \tag{101}$$

## Reference

[1] Přednáška ze speciální relativity, základní kurz fyziky na MFF UK.

[2] *Relativity, Special, General and Cosmological*, W. Rindler, Oxford University Press 2001