Věta: (základní věta algebry) *Buď $P(z)$ polynom nad tělesem komplexních čísel stupně alespoň jedna. Pak existuje $z_0 \in \mathbf{C}$ takové, že $P(z_0) = 0$.*

Důkaz: Funkce $|P(z)|$ má globální minimum v $\mathbf{C}$, neboť $\lim_{z\to\infty} |P(z)| = \infty$ a tedy stačí zvolit tak velký kruh se středem v počátku, aby mimo něj bylo $|P(z)| > K$ kde K je libovolně velké kladné reálné číslo; na tomto uzavřeném kruhu pak spojitá funkce $|P(z)|$ nabývá minima (pokud by toto minimum bylo větší než zvolené K, pak stačí najít kruh pro K rovné dvojnásobku tohoto minima). Nechť tedy funkce $|P(z)|$ nabývá minima v bodě z_0 a zapišme $Q(z) = P(z + z_0)$ takto:

$$Q(z) = c_0 + c_k z^k + \ldots + c_m z^m,\ c_k \neq 0$$

Pak platí $\forall z \in \mathbf{C} : |Q(z)| = |P(z + z_0)| \geq |P(z_0)| = |Q(0)| = |c_0|$. Pro spor předpokládejme, že $c_0 \neq 0$. Buď

$$d \in \mathbf{C}\colon d^k = -\frac{c_0}{c_k} \qquad 0 \doteq \alpha > 0$$

Položme $z = \alpha d$, pak $c_k z^k = c_k \alpha^k d^k = c_k \alpha^k (-c_0/c_k) = -c_0 \alpha^k$ a počítejme:

$$\begin{aligned}
|Q(z)| &= |c_0(1-\alpha^k) + \alpha^{k+1}(c_{k+1}d^{k+1} + \ldots + c_m \alpha^{m-k-1} d^m)| \\
&\leq |c_0(1-\alpha^k)| + \alpha^{k+1}|c_{k+1}d^{k+1} + \ldots + c_m \alpha^{m-k-1} d^m| \\
&= |c_0| + \alpha^k(-|c_0| + \alpha|c_{k+1}d^{k+1} + \ldots + c_m \alpha^{m-k-1} d^m|) \\
&< |c_0|
\end{aligned}$$

Poslední nerovnost platí, protože k $|c_0|$ přičítáme číslo (nekonečně) blízké $-|c_0|$ vynásobené α^k. Tím jsme došli ke sporu s předpokladem a tudíž nutně $0 = c_0 = Q(0) = P(z_0)$.

Poznámka: Idea nalezení takového z spočívá v nahlédnutí toho, že pro komplexní čísla ležící na kružnici s nekonečně malým poloměrem a středem v nule se $Q(z)$ chová jako $c_0 + c_k z^k$ a tudíž graf $Q(z)$ vypadá jako kružnice se středem v c_0 a nekonečně malým poloměrem. Je tedy zřejmé, že musí existovat z tak, aby $|c_0 + c_k z^k| < |c_0|$.
Evidentně stačí volit $\alpha < min\{|c_0|/|c_{k+1}d^{k+1} + \ldots + c_m \alpha^{m-k-1} d^m|, 1/2\}$.